atbalsts izglītībai

MĀCĪBU PRIEKŠMETU OLIMPIĀŽU
UZDEVUMU UN TO RISINĀJUMU KRĀJUMS

Matemātika

RĪGA 2021

Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Mācību priekšmetu olimpiāžu uzdevumu un to risinājumu krājums ir izstrādāts Valsts izglītības satura centra projekta “Nacionāla un starptautiska mēroga pasākumu īstenošana izglītojamo talantu attīstībai” (projekta Nr. 8.3.2.1/16/I/002) ietvaros un aptver mācību priekšmetu olimpiādēs izstrādāto saturu no 2017. līdz 2020. gadam.

Autoru kolektīvs:

Maruta Avotiņa
Mārtiņš Opmanis
Rihards Opmanis
Māris Valdats
Agnese Zīlīte

Tehniskais redaktors:
Mārtiņš Opmanis

ISBN 978-9934-24-032-4

Izcilība ir personības iezīme, kas attīstās ilgā darbā, izkopjot savas prasmes un zināšanas. Domājot par sasniegumiem, jāņem vērā arī zināšanu dziļums, kas sekmējis šo izcilo sniegumu ne tikai valsts, bet arī starptautiskā mērogā. Mācību priekšmetu olimpiādes ir patiesi godīga sacensība starp zinošākajiem un izturīgākajiem skolēniem – tiem, kas nepadodas grūtībām, rod iedvesmu un meklē aizvien jaunākus un radošākus risinājumus. Gadi pierādījuši, ka olimpiāžu laureāti un dalībnieki veido talantīgu, kā arī konkurētspējīgu Latvijas zinātnes un uzņēmējdarbības paaudzi ar iespējām radīt nozīmīgas inovācijas un rast risinājumus sabiedrības dzīves kvalitātes uzlabošanai.

Valsts izglītības satura centra vārdā vēlu visiem skolēniem un viņu pedagogiem iedvesmu, aizrautību un izaicinājumu, risinot šo olimpiāžu krājumu uzdevumus.

Līga Lejiņa
Valsts izglītības satura centra vadītāja

Saturs

Ievads 7
Uzdevumi 9
2016./2017. mācību gads - Latvijas 67. matemātikas olimpiāde 9
Novada olimpiāde - 2017 9
9. klase 9
10. klase 9
11. klase 10
12. klase 10
Valsts olimpiāde - 2017 11
9. klase 11
10. klase 11
11. klase 12
12. klase 12
2017./2018. mācību gads - Latvijas 68. matemātikas olimpiāde 13
Novada olimpiāde - 2018 13
9. klase 13
10. klase 13
11. klase 14
12. klase 14
Valsts olimpiāde - 2018 15
9. klase 15
10. klase 15
11. klase 16
12. klase 16
2018./2019. mācību gads - Latvijas 69. matemātikas olimpiāde 17
Novada olimpiāde - 2019 17
9. klase 17
10. klase 17
11. klase 18
12. klase 18
Valsts olimpiāde - 2019 19
9. klase 19
10. klase 19
11. klase 19
12. klase 20
2019./2020. mācību gads - Latvijas 70. matemātikas olimpiāde 21
Novada olimpiāde - 2020 21
9. klase 21
10. klase 21
11. klase 22
12. klase 22
Valsts olimpiāde - 2020 23
9. klase 23
10. klase 23

11. klase ... 23
12. klase ... 24
Atrisinājumi, skaidrojumi, vērtēšanas kritēriji, statistika ... 25
2016./2017. mācību gads - Latvijas 67. matemātikas olimpiāde ... 25
Novada olimpiāde - 2017 ... 25
9. klase ... 25
10. klase ... 28
11. klase ... 33
12. klase ... 38
Valsts olimpiāde - 2017 ... 42
9. klase ... 42
10. klase ... 45
11. klase ... 48
12. klase ... 52
2017./2018. mācību gads - Latvijas 68. matemātikas olimpiāde ... 56
Novada olimpiāde - 2018 ... 56
9. klase ... 56
10. klase ... 60
11. klase ... 64
12. klase ... 68
Valsts olimpiāde - 2018 ... 72
9. klase ... 72
10. klase ... 76
11. klase ... 79
12. klase ... 83
2018./2019. mācību gads - Latvijas 69. matemātikas olimpiāde ... 87
Novada olimpiāde - 2019 ... 87
9. klase ... 87
10. klase ... 93
11. klase ... 97
12. klase ... 102
Valsts olimpiāde - 2019 ... 107
9. klase ... 107
10. klase ... 110
11. klase ... 113
12. klase ... 117
2019./2020. mācību gads - Latvijas 70. matemātikas olimpiāde ... 123
Novada olimpiāde - 2020 ... 123
9. klase ... 123
10. klase ... 127
11. klase ... 132
12. klase ... 136
Valsts olimpiāde - 2020 ... 141
9. klase ... 141
10. klase ... 144
11. klase ... 147
12. klase ... 151

Pielikumi 156
Nevienādību pierādīšana – pilno kvadrātu atdalīšana 156
Dirihlē princips 159
Svēršanas uzdevumi 164
Induktīvi spriedumi 169
Matemātiskās indukcijas metode 175

Ievads

Matemātikas sacensības – olimpiādes un konkursi – paplašina skolēnu redzesloku un rosina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm un rada sacensību garu, kas ir lielisks stimuls lieliem sasniegumiem. Matemātikas sacensību uzdevumi attīsta abstrakto domāšanu, prasmi pierādīt un rada nepieciešamību pēc pierādījuma. Olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī veido cilvēka personību un darba kultūru, radinot skolēnus loģiski sakārtot savas domas un darboties secīgi.

Līdzīgi kā sportisti trenējas, lai gūtu panākumus sporta sacensībās, tā arī skolēniem (matemātiķiem) ir jāiegulda ne mazāk apjomīgs darbs, lai sagatavotos un veiksmīgi startētu matemātikas sacensībās un olimpiādēs. Tam ir nepieciešams ne tikai sistemātisks darbs matemātikas stundās skolā, apgūstot pamata zināšanas un izkopjot prasmes uzdevumu risināšanā, bet arī darbs ārpus matemātikas stundām, piemēram, matemātikas pulciņos, nodarbībās, olimpiādēs, konkursos, kā arī patstāvīgi trenējoties matemātikas sacensību uzdevumu risināšanā.

Darīšu visu, centīšos, strādāšu un cīnīšos.

Martins Dukurs, skeletonists

Vai Tu, skolēn, esi gatavs darīt visu iespējamo, censties un strādāt, lai gūtu panākumus matemātikas olimpiādēs un sacensībās?

Daudzi Latvijā zināmi zinātnieki un pētnieki savus pirmos pētniecības soļus sākuši ar piedalīšanos matemātikas konkursos un olimpiādēs. Latvijas Universitātes profesors Andris Ambainis ir teicis: "*Kad biju 5. klasē, Agnis Andžāns matemātikas olimpiādē teica, ka man ir labi risinājumi, bet tos vajadzētu sīkāk izskaidrot. Kopš tā laika esmu centies visu pēc iespējas paskaidrot un tagad domāju, ka šis bija viens no visnoderīgākajiem padomiem manā karjerā.*"

Atkarībā no klases skolēns var izvēlēties kādu no tālāk minētajām Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas (LU A. Liepas NMS; http://nms.lu.lv/) organizētajām matemātikas sacensībām vai nodarbībām, kurās piedalīties (skat. tabulā). Piekto klašu konkurencē minētajās sacensībās drīkst piedalīties arī jaunāku klašu skolēni.

<table>
<tr><th>4. kl.</th><th>5. kl.</th><th>6. kl.</th><th>7. kl.</th><th>8. kl.</th><th>9. kl.</th><th>10. kl.</th><th>11. kl.</th><th>12. kl.</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">Sagatavošanās olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">Novada olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">Valsts olimpiāde</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="8">Atklātā matemātikas olimpiāde</td></tr>
<tr><td>Tik vai… Cik?</td><td colspan="3">Jauno matemātiķu konkurss</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Profesora Cipariņa klubs</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Punktiņš</td><td></td><td colspan="3">Izlases nodarbības</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">Mazā matemātikas universitāte</td></tr>
</table>

Valsts matemātikas olimpiāde notiek kopš 20. gadsimta piecdesmitajiem gadiem, 2019./2020. mācību gadā notika jau Valsts 70. matemātikas olimpiāde. Olimpiādes 2. un 3. posmu 9.-12. klasēm organizē LU A. Liepas NMS sadarbībā ar Valsts izglītības satura centru (VISC).

- Valsts matemātikas olimpiādes 1. posms (Sagatavošanās olimpiāde) ir lielisks veids, kā iesākt jauno olimpiāžu gadu. Katras skolas matemātikas skolotāji paši var izlemt, vai viņi savā skolā organizē šo olimpiādi. Parasti šīs olimpiādes labākos risinātājus katra skola izvirza dalībai Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmā.
- Valsts matemātikas olimpiādes 2. posms (Novada olimpiāde) notiek novada/ novadu apvienības/ pilsētas mērogā. Šīs olimpiādes 9.-12. klašu laureāti tiek izvirzīti

dalībai 3. posmā, kā to paredz matemātikas olimpiādes kārtība, ko katru gadu apstiprina VISC. Katrai klašu grupai tiek piedāvāti 5 uzdevumi, kuru risināšanai ir 5 astronomiskās stundas, par katru uzdevumu var iegūt 0-10 punktus. Skolēnu risinājumus vērtē novada žūrijas komisija pēc LU A. Liepas NMS izstrādātajiem vērtēšanas kritērijiem.

- Valsts matemātikas olimpiādes 3. posms (Valsts olimpiāde) parasti notiek Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā martā, ceturtdienā un piektdienā tieši pirms skolēnu pavasara brīvlaika. Katrai klašu grupai tiek piedāvāti 5 uzdevumi, kuru risināšanai ir 5 astronomiskās stundas, par katru uzdevumu var iegūt 0-10 punktus. Uz otrās dienas sacensībām tiek aicināti tikai pirmās dienas labākie risinātāji, lai sacenstos par iekļūšanu Latvijas valsts komandā dalībai Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.

Būtisku ieguldījumu matemātikas olimpiāžu attīstībā un popularizēšanā ir ieguldījis profesors Agnis Andžāns, kurš LU A. Liepas NMS darbā iesaistījās jau studiju gados (ap 1970. gadu) un aktīvi darbojās līdz pat 2012. gadam. Viņa vadībā ir izaugušas vairākas matemātikas olimpiāžu dalībnieku paaudzes, kas turpina atbalstīt matemātikas olimpiādes, veidojot uzdevumu komplektus, vērtējot skolēnu risinājumus un vadot Izlases nodarbības spējīgākajiem jaunajiem matemātiķiem.

Šobrīd Latvijas matemātikas olimpiāžu uzdevumu komplektu veidotāji un uzdevumu autori ir LU A. Liepas NMS darbinieki – Maruta Avotiņa, Elīna Buliņa, Emīls Kalugins, Agnese Zīlīte – un bijušie olimpiāžu laureāti un entuziasti – Kalvis Apsītis, Andrejs Cibulis, Filips Jeļisejevs, Mārtiņš Opmanis, Rihards Opmanis, Artjoms Ubaidulajevs, Māris Valdats, Jevgēnijs Vihrovs.

Kopš 2014./2015. mācību gada Novada olimpiādē viens no pieciem uzdevums ir par iepriekš izsludinātu tēmu, skolēniem tiek piedāvāts arī teorijas materiāls, lai patstāvīgi vai ar skolotāja palīdzību apgūtu šo tēmu un raksturīgas olimpiāžu uzdevumu risināšanas metodes un spriešanas veidus. Matemātikas olimpiāžu uzdevumu atrisināšanai bieži vien ir nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet gan prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, kā arī dažreiz uzdevumiem ir iespējami vairāki, būtiski atšķirīgi risinājumi.

Šajā materiālā apkopoti Valsts matemātikas olimpiādes 2. un 3. posma uzdevumi 9.–12. klašu skolēniem no 2016./2017. mācību gada līdz 2019./2020. mācību gadam.

Pirms uzdevumu risināšanas ieteicams izlasīt pielikumā dotos teorijas materiālus, kas var būt noderīgi uzdevumu risināšanā. Veltiet laiku ne tikai uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot risinājumus, bet arī savu risinājumu salīdzināšanai ar grāmatā piedāvātajiem. Tie var saturēt jaunas, agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības Jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Materiālā doti izvērsti un pilnīgi uzdevumu atrisinājumi, lai būtu priekšstats par atrisinājuma pierakstu. Daudziem uzdevumiem ir iespējami vairāki, būtiski atšķirīgi atrisinājumi, tāpēc šajā grāmatā piedāvātos nevajag uztvert kā vienīgos iespējamos, tieši otrādi – aicinu meklēt risinājumus, kas būtu labāki nekā piedāvātie!

Pēc katra uzdevuma atrisinājuma dots Skaidrojums par uzdevumu, kurā iekļauta informācija par uzdevumam atbilstošo matemātikas apakšnozari (algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika), zināšanām un prasmēm, kas tiek gaidītas no skolēniem. Olimpiādes 2. posma uzdevumiem doti vērtēšanas kritēriji (par katru uzdevumu var saņemt 0-10 punktus, n – ja uzdevums nav risināts), kas palīdz novērtēt uzdevuma sarežģītības līmeni un sniegt padomus par atrisinājuma struktūru un risinājuma soļiem.

Lai šī grāmata ir labs palīgs, darot visu iespējamo, lai gūtu panākumus!

Maruta Avotiņa

Uzdevumi

2016./2017. mācību gads - Latvijas 67. matemātikas olimpiāde

Novada olimpiāde - 2017

9. klase

1. Koka sija sver 90 kg, bet par 2 m garāka dzelzs sija sver 160 kg, pie tam viens metrs dzelzs sijas sver par 5 kilogramiem vairāk nekā viens metrs koka sijas. Cik sver viens metrs katras sijas?

2. Pierādīt, ka $9x^6 - x^3 + 1 > 0$ visiem reāliem x.

3. Trapeces $ABCD$ pamatu attiecība $BC:AD = 3:5$. Uz sānu malas CD atlikts punkts E tā, ka nogrieznis AE dala trapeces laukumu uz pusēm. Kādā attiecībā punkts E sadala sānu malu CD?

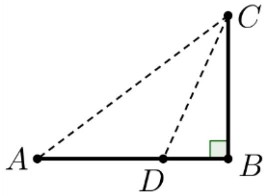
4. Naturālu skaitli sauksim par *pārdabisku*, ja, tā ciparus uzrakstot pretējā secībā, iegūst skaitli, kas ir lielāks nekā sākotnējais skaitlis, un iegūtais skaitlis dalās ar sākotnējo skaitli. Mazākais *pārdabiskais* skaitlis ir 1089, jo $9801 : 1089 = 9$. Atrast vēl divus citus *pārdabiskus* skaitļus!

5. a) Pierādīt, ka starp 1010 dažādiem naturāliem skaitļiem, no kuriem neviens nepārsniedz 2017, vienmēr iespējams izvēlēties trīs skaitļus tā, ka divu izvēlēto skaitļu summa ir vienāda ar trešo skaitli!

b) Vai šāda īpašība ir spēkā arī 1009 dažādiem naturāliem skaitļiem, kas nepārsniedz 2017?

10. klase

1. Punkti A un B ir 16 km attālumā viens no otra, bet B un C – 12 km attālumā. Šoseja $A - B - C$ punktā B izveido taisnu leņķi (skat. 1. att.). Ceļinieka ātrums pa šoseju ir v km/h, bet pa lauku ceļu ātrums ir c km/h. Ja ceļinieks dodas no A uz C pa šoseju (maršruts $A \to B \to C$), tad viņš nonāk galapunktā par 20 min ātrāk nekā ejot no A uz C pa lauku ceļu (maršruts $A \to C$). Ja turpretī viņš iet 11 km pa šoseju no A uz D un pēc tam uz C pa lauku ceļu (maršruts $A \to D \to C$), tad viņš ceļā pavada 5 stundas un 5 minūtes. Aprēķināt v un c!



1. att.

2. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0$, ja x, y – reāli skaitļi!

3. Kvadrāta $ABCD$ diagonāles krustojas punktā O, punkts E ir nogriežņa AO viduspunkts. Taisne BE krusto malu AD punktā F, bet taisne FO krusto malu BC punktā G. Pierādīt, ka trijstūris BFG ir vienādsānu!

4. Dots taisnstūris ar izmēriem 7×5 rūtiņas. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas sagriezts septiņās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 5 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!

5. Desmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizvietojot ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem, ieguva vārdu $MATEMĀTIKA$ (īsais "A" un garais "Ā" aizstāj atšķirīgus ciparus). Papildus zināms, ka skaitlis $\overline{MA}$ dalās ar 2, $\overline{MAT}$ – ar 3, $\overline{MATE}$ – ar 4, $\overline{MATEM}$ – ar 5, $\overline{MATEMĀ}$ – ar 6, $\overline{MATEMĀT}$ – ar 7, $\overline{MATEMĀTI}$ – ar 8, $\overline{MATEMĀTIK}$ – ar 9, $\overline{MATEMĀTIKA}$ – ar 10. Noteikt, kāds bija sākotnējais desmitciparu skaitlis!

11. klase

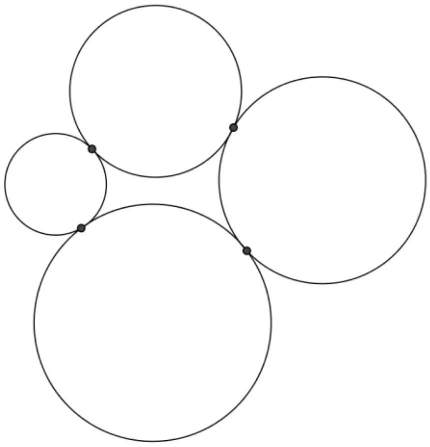
1. Zināms, ka skaitļu a_1; a_2; a_3 summa ir 105 un tie veido aritmētisko progresiju, bet skaitļi a_1; a_2; a_3+4 veido ģeometrisko progresiju. Atrast visas iespējamās a_1; a_2; a_3 vērtības un pamatot, ka citu nav!

2. Pierādīt, ka $x^4+2x^3y+2xy^3+y^4 \geq 6x^2y^2$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi!

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x+z=2017 \\ 31xz=y^2 \end{cases}$$

4. Četras riņķa līnijas ārēji pieskaras tā, kā parādīts 2. att. Pierādīt, ka četrstūrim, ko veido riņķa līniju pieskaršanās punkti, var apvilkt riņķa līniju!



2. att.

5. Antra un Baiba spēlē spēli uz 3×3 rūtiņu laukuma. Spēlētājas gājienus izdara pēc kārtas, katrā gājienā kādā no tukšajām rūtiņām ierakstot vai nu nullīti, vai krustiņu (katra spēlētāja katrā gājienā var rakstīt jebkuru no šiem simboliem). Kad viss laukums aizpildīts, tiek saskaitīts spēles rezultāts. Par katru rindu, kolonnu un diagonāli (tādu, kas satur 3 rūtiņas), ja tajā ir pāra skaits krustiņu, punktu saņem Antra, bet, ja krustiņu skaits ir nepāra, tad punktu saņem Baiba. Uzvar spēlētāja, kuras punktu kopsumma ir lielāka. Pierādīt, ka spēlētājai, kura sāk spēli, ir uzvaroša stratēģija, un aprakstīt to!

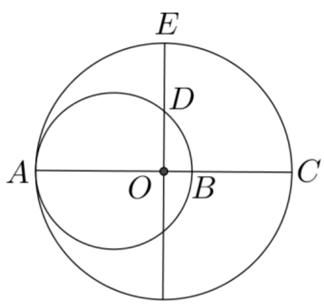
12. klase

1. Jebkuriem diviem pozitīviem skaitļiem x un y piekārtots trešais skaitlis $x^{\lg y}$, ko apzīmēsim ar $x*y$. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem x,y un z izpildās $(x*y)*z=x*(y*z)$.

2. Pierādīt, ka $x^2+y^2+4 \geq 2x-2y-xy$, ja x,y – reāli skaitļi!

3. Naturālu skaitli sauksim par *pārdabisku*, ja, tā ciparus uzrakstot pretējā secībā, iegūst skaitli, kas ir lielāks nekā sākotnējais skaitlis, un iegūtais skaitlis dalās ar sākotnējo skaitli. Mazākais *pārdabiskais* skaitlis ir 1089, jo $9801:1089=9$. **a)** Atrast vēl divus citus *pārdabiskus* skaitļus! **b)** Pierādīt, ka *pārdabisku* skaitļu ir bezgalīgi daudz!

4. Divas dažādas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā A. Lielākās riņķa līnijas centrs ir O un taisne OA krusto mazāko riņķa līniju punktā B, bet lielāko – punktā C. Lielākās riņķa līnijas diametrs, kas ir perpendikulārs OA, krusto mazāko riņķa līniju punktā D, bet lielāko – punktā E (punkts D atrodas starp O un E, skat. 3. att.). Aprēķināt abu riņķa līniju rādiusu garumus, ja $DE=5$ un $BC=7$.



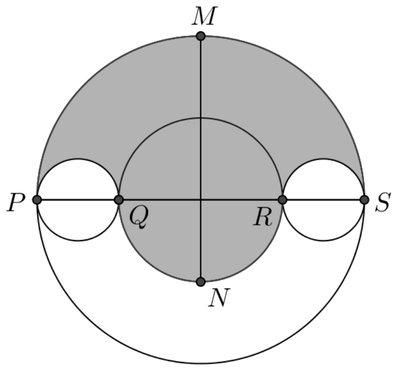
3. att.

5. Kādu lielāko skaitu 5×13 rūtiņu taisnstūru var izgriezt no rūtiņu lapas, kuras izmēri ir **a)** 41×65; **b)** 47×65 rūtiņas?

9. klase

1. Doti 63 dažādi naturāli skaitļi, kuru summa ir 2017. Atrodiet šos skaitļus un pamatojiet, ka citu nav!

2. Uz taisnes atlikti punkti P, Q, R un S tā, ka $PQ = RS$ (skat. 4. att.). Nogriežņi PQ, RS, PS, QR ir riņķu diametri. Nogrieznis MN ir iekrāsotās figūras simetrijas ass. Pierādīt, ka iekrāsotās figūras laukums ir vienāds ar laukumu riņķim, kura diametrs ir MN.



4. att.

3. Naturālā piecciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, un ieguva pierakstu $GANGA$. Zināms, ka $GANGA$, dalot ar 7, dod atlikumu A, $GANGA$, dalot ar 11, dod atlikumu N, bet $GANGA$, dalot ar 13, dod atlikumu G, turklāt $G > A > N$. Kāds varēja būt sākotnējais skaitlis?

4. Pierādīt, ka $x^4 - x^2 - 3x + 4 > 0$ visiem reāliem x.

5. Katra no bumbiņām, kas atrodas kastē, nokrāsota vienā no N krāsām, un uz katras uzrakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz N. Zināms, ka katra no N krāsām izmantota vismaz vienu reizi, tāpat arī katrs skaitlis, kas nepārsniedz N, izmantots vismaz vienu reizi. Kādām N vērtībām kastē noteikti varēs atrast N dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām būs rakstīti N dažādi skaitļi?

10. klase

1. Dots, ka b un c ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2 - bx + c = 0$ reālās saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka **a)** $x_1^2 + x_2^2 + 2017$; **b)** $x_1^3 + x_2^3$ ir naturāls skaitlis!

2. Dots pirmskaitlis, kas satur vismaz 4 dažādus ciparus. Pierādīt, ka tā ciparus var pārkārtot citā secībā tā, lai jauniegūtais skaitlis nebūtu pirmskaitlis!

3. Četrstūris $ABCD$ ir ievilkts riņķa līnijā ω_1, bet $ABCD$ malu viduspunkti atrodas uz riņķa līnijas ω_2. Pierādīt, ka $\sphericalangle ABD + \sphericalangle BDC = 90°$.

4. Dotas 40 kartītes, uz divām no tām uzrakstīts skaitlis 1, uz divām – skaitlis 2, ..., uz divām – skaitlis 20. Kāds ir lielākais iespējamais komplektu skaits, ko vienlaicīgi var izveidot no šīm 40 kartītēm tā, lai katrā komplektā būtu trīs kartītes, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 21?

5. Seši tūristi bija devušies vairākos ceļojumos uz sešām valstīm, katrā ceļojumā viens tūrists apceļoja tieši vienu valsti. Ja izvēlamies jebkuras trīs valstis un jebkurus trīs tūristus, tad vismaz viens no viņiem ir bijis ceļojumā uz kādu no šīm valstīm. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais ceļojumu skaits?

11. klase

1. Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kam katrs nākamais cipars ir lielāks par iepriekšējo?

2. Kurš no skaitļiem $\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{5}}$un $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{7}}$ ir lielāks?

3. Trīs riņķa līnijas ω_1, ω_2 un ω_3 krustojas punktā O. Riņķa līnijas pa pāriem krustojas arī punktos P (ω_1 un ω_2), R (ω_2 un ω_3) un S (ω_1 un ω_3). Uz ω_1 loka PS, kas nesatur O, izvēlēts punkts A, taisne AP vēlreiz krusto ω_2 punktā B, un taisne AS vēlreiz krusto ω_3 punktā C. Pierādīt, ka punkti B, R un C atrodas uz vienas taisnes!

4. Pierādīt, ka no jebkuriem 17 naturāliem skaitļiem var izvēlēties 9 skaitļus tā, lai to summa dalītos ar 9.

5. Uz riņķa līnijas atzīmēti N punkti tā, ka šie punkti ir regulāra N-stūra virsotnes. Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli: Viņi pārmaiņus novelk pa vienai hordai, kas savieno divus atzīmētos punktus uz riņķa līnijas tā, lai novilktā horda nekrustotos ar agrāk novilktajām hordām. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena no novilktajām hordām izveidojas trijstūris. Kurš spēlētājs noteikti var uzvarēt, ja A izdara pirmo gājienu un **a)** $N = 14$; **b)** $N = 15$?

12. klase

1. Doti tādi skaitļi a, b un c, ka $a + c = \frac{b}{3}$, turklāt neviens no skaitļiem a, b, c nav 0. Pierādīt, ka $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiks noteikti krusto x asi kādā intervāla $[-1; 1]$ punktā!

2. Pierādīt, ka $\sqrt{x^2 + y^2} + \left(2 - \sqrt{2}\right)\sqrt{xy} \geq x + y$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi!

3. Dots taisnstūris $ABCD$. Uz taisnes BD atlikts punkts E, tā ka D atrodas starp B un E. Uz taisnes EC atlikts punkts F tā, ka BF ir paralēls AC. Pierādīt, ka trijstūra BEF laukums ir lielāks nekā taisnstūra $ABCD$ laukums!

4. Naturālu skaitli sauksim par *skaistu*, ja tā visu naturālo dalītāju summa (ieskaitot 1 un pašu skaitli) ir nepāra skaitlis. Atrast mazāko naturālo skaiti k ar īpašību: starp jebkuriem patvaļīgi izvēlētiem k *skaistiem* skaitļiem var izvēlēties divus dažādus skaitļus tā, lai to reizinājums būtu naturāla skaitļa kvadrāts!

5. Kādā valstī no parlamenta deputātiem ir izveidotas 100 komisijas. Katram deputātam ir pienākums strādāt vismaz vienā komisijā, taču deputāti drīkst strādāt arī vairākās komisijās. Deputāti par darbu komisijās katru mēnesi saņem atalgojumu pēc šāda principa:

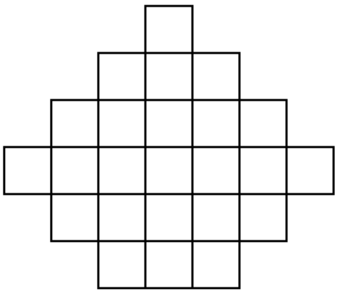
- par darbu pirmajā komisijā netiek maksāts atalgojums;
- par darbu katrā nākamajā komisijā tiek maksāts par 10 eiro vairāk nekā par darbu iepriekšējā komisijā (tas ir, par darbu otrajā komisijā tiek maksāti 10 eiro, par darbu trešajā komisijā tiek maksāti 20 eiro utt.).

Zināms, ka jebkurām divām dažādām komisijām ir tieši viens kopīgs deputāts, kas darbojas tajās abās. Cik liels ir visu deputātu kopējais mēneša atalgojums par darbu komisijās?

Novada olimpiāde - 2018

9. klase

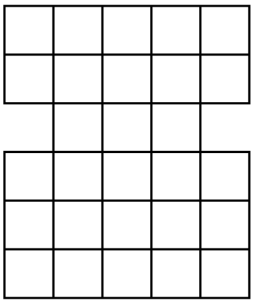
1. Jaunieši devās četru dienu pārgājienā gar jūru. Pirmajā dienā tie nogāja 30 km. Otrajā dienā tie ar jahtu nobrauca 20% no atlikušā ceļa. Trešajā dienā jaunieši atkal gāja kājām, noejot 1,5 reizes lielāku attālumu nekā viņi brauca ar jahtu. Ceturtajā dienā atlikušo ceļu 1,5 stundās jaunieši veica ar kvadricikliem, kuru ātrums ir 40 km/h. Cik kilometru garš bija maršruts?
2. Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 30 vienas klases skolēni, no katra ēdienu veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējās ne vairāk kā vienu ēdienu, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Vai noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu?
3. Četrstūra $ABCD$ malu AB un CD garumu summa ir vienāda ar malas AD garumu. Leņķu DAB un CDA bisektrišu krustpunkts F atrodas uz malas BC. Pierādīt, ka punkts F ir BC viduspunkts!
4. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y, ka $20x^3 - 17y^2 + 1 = 2018$?
5. Dota figūra, kuras laukums ir 24 rūtiņas (skat. 5. att.). Griežot pa rūtiņu līnijām, tā sagriezta sešās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 4 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!



5. att.

10. klase

1. Uz gara baļķa 600 cm attālumā viens no otra atrodas gliemezis un skudra. Ja tie pārvietotos viens otram pretī, tad tie sastaptos pēc 5 minūtēm. Ja tie kustētos vienā virzienā ar tiem pašiem ātrumiem, tad skudra panāktu gliemezi pēc 20 minūtēm. Noteikt, cik centimetrus minūtē veic skudra un cik – gliemezis!
2. Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 200 skolēni, no katra ēdienu veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējās ne vairāk kā vienu ēdienu, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Kāds ir lielākais skaits skolēnu, kas noteikti pasūtīja vienu un to pašu?
3. Punkts K ir kvadrāta $ABCD$ malas AB viduspunkts. Uz diagonāles AC atlikts tāds punkts L, ka $AL : LC = 3 : 1$. Pierādīt, ka $\sphericalangle KLD = 90°$.
4. No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru izmantojot divas reizes, izveidoti trīs sešciparu skaitļi. Ar kādu lielāko nuļļu skaitu var beigties trīs izveidoto skaitļu summa?
5. Dota figūra, kuras laukums ir 28 rūtiņas (skat. 6. att.). Griežot pa rūtiņu līnijām, tā sagriezta septiņās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 4 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!



6. att.

11. klase

1. Spīdolai ir 482 bildes un divi vienādi fotoalbumi. Pirmā albuma katrā lapā viņa ielīmēja tieši 21 bildi. Ja otrā albuma katrā lapā viņa ielīmētu tieši 19 bildes, tad lapu pietrūktu, savukārt, ja katrā lapā viņa ielīmētu tieši 23 bildes, tad vismaz viena lapa paliktu tukša. Cik lapu ir fotoalbumā?
2. Sporta zālē trenējas 32 cilvēki, kuri visi ir vismaz 21 gadu veci. Pierādīt, ka no šiem cilvēkiem var atrast divus tādus, kuriem ir vairāk nekā 30 gadi vai 4 tādus, kuru gadu skaits ir vienāds!
3. Trapeces $ABCD$ pamatu AB un CD garumu summa ir vienāda ar sānu malas AD garumu. Pierādīt, ka leņķu DAB un CDA bisektrises krustojas BC viduspunktā!
4. No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru izmantojot divas reizes, izveidoja vienu septiņciparu, vienu sešciparu un vienu piecciparu skaitli. Ar kādu lielāko nuļļu skaitu var beigties trīs izveidoto skaitļu summa?
5. Pierādīt, ka $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \geq 10abcd$ visiem reāliem skaitļiem a, b, c, d.

12. klase

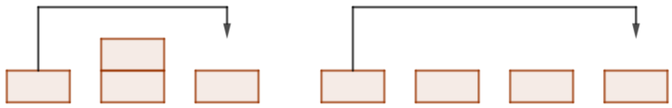
1. Divas sniega tīrāmās mašīnas, strādājot vienlaicīgi, Sūnu ciema ielas var notīrīt 4 h 12 min. Ja pirmās mašīnas darba ražīgumu palielinātu divas reizes, bet otra mašīna sāktu strādāt par 10 minūtēm vēlāk nekā pirmā, tad sniegu notīrītu 2 h 30 min. Cik stundās sniegu Sūnu ciemā notīrītu, ja strādātu tikai otrā sniega tīrāmā mašīna?
2. Pierādīt, ka starp jebkuriem 78 trīsciparu skaitļiem var atrast četrus tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas!
3. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras malai AB punktā D, bet malai AC punktā E. Leņķu B un C bisektrises krusto taisni DE attiecīgi punktos M un N. Pierādīt, ka punkti B, C, M un N atrodas uz vienas riņķa līnijas!
4. Doti naturāli skaitļi a un b. Pierādīt

   a) ja $20a + 18b$ dalās ar 7, tad $201a + 8b$ dalās ar 7;

   b) ja $201a + 8b$ dalās ar 7, tad $20a + 18b$ dalās ar 7.
5. Vienādojuma ar veseliem koeficientiem $x^4 + bx^2 + c = 0$ vienas saknes vērtība ir $\sqrt{20} - \sqrt{18}$. Atrast vienādojuma koeficientus un pārējās trīs saknes!

9. klase

1. Zināms, ka a un b ir pozitīvi skaitļi, un kvadrātfunkciju $y = ax^2 + 2018x + b$ un $y = bx^2 + 2018x + a$ minimālo vērtību summa ir nulle. Pierādīt, ka katrai no šīm kvadrātfunkcijām minimālā vērtība ir nulle!
2. Izvēlēti trīs dažādi naturāli skaitļi un aprēķināti to reizinājumi pa pāriem, iegūstot trīs reizinājumus. Pierādīt, ka šos reizinājumus, dalot ar 4, vismaz divi dod vienādus atlikumus!
3. Rūtiņu tabulas ar izmēriem 8×14 katrā rūtiņā sēž tieši viena muša. Visas mušas pārlido uz citu tabulu ar izmēriem 7×16 rūtiņas tā, ka katrā rūtiņā atkal ir tieši viena muša. Vai iespējams, ka visas mušas, kas bija kaimiņi sākotnējā izvietojumā (tas ir, atradās blakus rūtiņās ar kopīgu malu), būs kaimiņi arī jaunajā izvietojumā?
4. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AC = 6$ un $AB = BC = 5$. Uz malas AB atlikts tāds punkts D, ka $BD = 2$, un uz malas AC atlikts tāds punkts E, ka $AE = 2$. Nogriežņi BE un CD krustojas punktā M. Aprēķināt trijstūra BMC laukumu!
5. Rindā izvietotas 2018 monētas. Vienā gājienā drīkst paņemt vienu monētu, pārcelt to pāri tieši divām monētām un uzlikt to uz nākamās monētas. Vai 1009 gājienos visas monētas iespējams savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē?



7. att.

10. klase

1. Atrast visus tādus veselu skaitļu pārus $(x; y)$, kas apmierina nevienādību sistēmu
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0 \\ x + 2y < \dfrac{15}{2} \end{cases}$$
2. Paralelograma $ABCD$ malu BC un CD viduspunkti attiecīgi ir K un M. Aprēķināt AD garumu, ja $AK = 6$, $AM = 3$ un $\sphericalangle KAM = 60°$.
3. Skaitļus a, b, c sauksim par *skaistu trijnieku*, ja tiem piemīt šādas īpašības:
   - tie ir trīs pēc kārtas esoši naturāli skaitļi;
   - katrs no tiem dalās ar savu ciparu summu.

   Piemēram, *skaists trijnieks* ir 8, 9, 10.

   a) Atrast tādu *skaistu trijnieku*, kurā mazākais skaitlis ir lielāks nekā 10.

   b) Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *skaistu trijnieku*!
4. Desmit šahisti katrs ar katru izspēlēja vienu šaha partiju, dažas no tām beidzās neizšķirti. Ir zināms, ka bija tieši viens šahists, kas neizšķirti nospēlēja tieši vienu partiju, divi šahisti – kas nospēlēja divas, trīs šahisti – kas nospēlēja trīs, un četri šahisti, kas neizšķirti nospēlēja tieši četras partijas. Šos pēdējos četrus šahistus (kas katrs četras partijas nospēlēja neizšķirti) sauksim par *neizšķirtu karaļiem*, bet par *karalisku neizšķirtu* sauksim partiju, kurā neizšķirtu izcīnīja divi *neizšķirtu karaļi*. Vai var apgalvot, ka tika izspēlēts **a)** vismaz viens *karaliskais neizšķirts*, **b)** *vismaz divi karaliskie neizšķirti*?
5. Izvēlēti 12 dažādi naturāli skaitļi, neviens no tiem nepārsniedz 35. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem iespējams izvēlēties trīs atšķirīgus skaitļu pārus tā, ka visiem trīs pāriem lielākā un mazākā skaitļa starpība ir vienāda! Viens skaitlis var ietilpt arī divos pāros (vienreiz kā lielākais, otrreiz – kā mazākais).

11. klase

1. Atrisināt nevienādību $\left|\left||x-2|-3\right|-7\right|<5$.
2. Vienādsānu trijstūrī ABC no pamata BC viduspunkta H novilkts perpendikuls HE pret sānu malu AC, punkts O ir nogriežņa HE viduspunkts. Pierādīt, ka $AO \perp BE$!
3. Skaitļus a, b, c, d, e sauksim par *skaistu piecinieku*, ja tiem piemīt šādas īpašības:
   - tie ir pieci pēc kārtas esoši naturāli skaitļi;
   - katrs no tiem dalās ar savu ciparu summu.

   Piemēram, *skaists piecinieks* ir 6, 7, 8, 9, 10.

   a) Atrast tādu *skaistu piecinieku*, kurā mazākais skaitlis ir lielāks nekā 10.

   b) Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *skaistu piecinieku*!
4. Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos
$$\begin{cases} x^3+4x=5y \\ y^3+4y=5z \\ z^3+4z=5x \end{cases}$$
5. Trīs 500 litru mucās atrodas attiecīgi 100, 107 un 113 litri ūdens. Vienā gājienā atļauts jebkurā mucā M pieliet klāt no jebkuras citas mucas (kurā ir vismaz tikpat daudz ūdens kā mucā M) tik daudz ūdens, cik mucā M jau atrodas. Vai, veicot šādus gājienus, iespējams iztukšot **a)** vienu mucu, **b)** divas mucas?

12. klase

1. Apzīmēsim $a=2018^{\lg(\lg 2018)}$, $b=(\lg 2018)^{\lg 2018}$ un $c=(\lg(\lg 2018))^{2018}$. Aprēķināt izteiksmes $\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}$ vērtību!
2. Uz trijstūra ABC malas AB atlikti punkti D un E tā, ka $AD=DE=EB$, uz malas BC – punkti F un G tā, ka $BF=FG=GC$, uz malas AC – punkts H tā, ka $2AH=CH$. Nogrieznis DF krusto nogriežņus EH un EG attiecīgi punktos P un R. Pierādīt, ka $DP=PR=RF$.
3. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^6+3x^3+1=y^4$.
4. Taisnstūris, kura izmēri ir $n\times m$ rūtiņas, griežot par rūtiņu līnijām, sagriezts 1×6 rūtiņas lielos taisnstūros. Pierādīt, ka n vai m dalās ar 6.
5. Trīs mucās attiecīgi ir a, b un c litri ūdens, kur a, b, c ir naturāli skaitļi. Katras mucas tilpums ir lielāks nekā $a+b+c$ litri. Vienā gājienā atļauts jebkurā mucā M pieliet klāt no jebkuras citas mucas (kurā ir vismaz tikpat daudz ūdens kā mucā M) tik daudz ūdens, cik mucā M jau atrodas. Pierādīt, ka, veicot šādus gājienus, vienmēr iespējams iztukšot vienu no mucām!

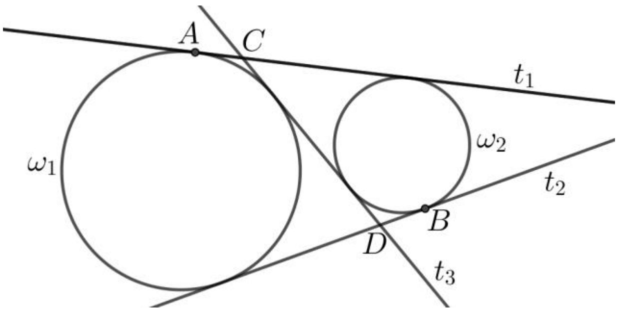
Novada olimpiāde - 2019

9. klase

1. Lineāra funkcija $y = (m^2 - 3m)x + 4m - 4$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 2. Atrodi m vērtības un noskaidro, vai atbilstošā funkcija ir augoša vai dilstoša!
2. Dotas divas melnas, divas sarkanas un divas zaļas lodītes. Vienas lodītes masa ir 99 g, bet tādas pašas krāsas otras lodītes masa ir 101 g. Pārējās četras lodītes katra sver 100 g. Kā, lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām atrast vieglāko lodīti?
3. Uz kvadrāta $ABCD$ malām AB, BC, CD un DA attiecīgi atzīmēti punkti E, F, G, H tā, ka $AE = BF = CG = DH$. Kvadrāta iekšpusē atlikts patvaļīgs punkts O. Pierādīt, ka $S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{BFOE} + S_{DHOG}$.
4. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām. Rindas sanumurētas no lejas uz augšu ar skaitļiem $1;\ 2;\ \ldots;\ n$; tāpat sanumurētas kolonnas no kreisās uz labo pusi. Katrā rūtiņā ierakstīts vai nu $(+1)$, vai (-1). Ja rindas un kolonnas numuri ir vienādi, tad visu šajā rindā ierakstīto skaitļu reizinājums atšķiras no visu šajā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājuma. Vai tas ir iespējams, ja **a)** $n = 7$, **b)** $n = 8$?
5. Kāds mazākais ciparu skaits jāpieraksta ciparu virknes 3456 beigās, lai iegūtu skaitli, kas dalās ar 2019?

10. klase

1. Kvadrātfunkcija $y = x^2 + (m^2 + 3m)x + m - 1$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 1. Kāda var būt m vērtība? Atrast otru parabolas krustpunktu ar x asi!
2. Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Trim no tām masa katrai ir 50 g, bet pārējām trim – katrai 51 g. Kā, lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām atrast vienu monētu, kuras masa ir 51 g?
3. Plaknē dotas divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kurām nav kopīgu punktu un kuru rādiusi nav vienāda garuma. Novilktas trīs pieskares t_1, t_2 un t_3, kas katra pieskaras abām riņķa līnijām – abas riņķa līnijas atrodas vienā un tajā pašā t_1 pusē, vienā un tajā pašā t_2 pusē, bet katra savā t_3 pusē (skat. 8. att.). Taisne t_1 pieskaras ω_1 punktā A un krusto t_3 punktā C, taisne t_2 pieskaras ω_2 punktā B un krusto t_3 punktā D. Pierādīt, ka $AC = BD$.

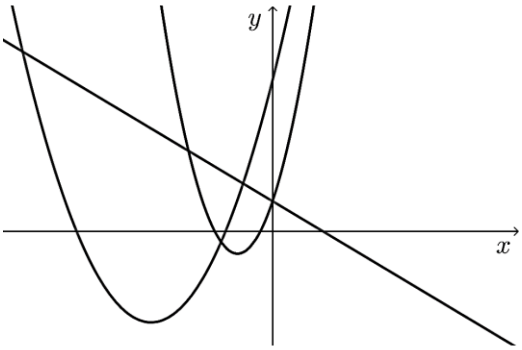


8. att.

4. Doti 2019 reāli skaitļi ar īpašību, ka jebkuru 1010 skaitļu summa ir lielāka nekā atlikušo 1009 skaitļu summa. Pierādīt, ka visi dotie skaitļi ir pozitīvi!
5. Atrast visus pirmskaitļu pārus (m, n), kuriem $20m + 18n = 2018$.

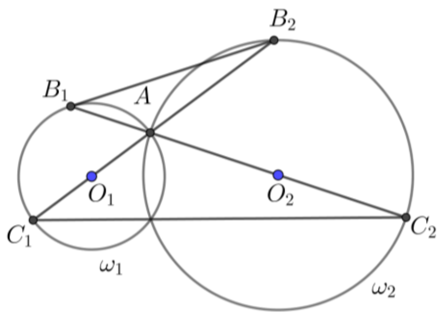
11. klase

1. Vai var gadīties, ka 9. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki? (Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.)



9. att.

2. Šaha klubā ir 13 šahisti. Visu viņu spēles prasme ir atšķirīga un partijā vienmēr uzvar spēcīgākais. **a)** Kā, izspēlējot 12 partijas, noskaidrot pašu labāko šahistu šajā klubā? **b)** Kā, izspēlējot 15 partijas, noskaidrot gan pašu labāko, gan otru labāko šahistu šajā klubā?
3. Divas riņķa līnijas ω_1 (ar centru punktā O_1) un ω_2 (ar centru punktā O_2) krustojas punktā A. Taisne O_1A krusto ω_2 punktā B_2, bet ω_1 – punktā C_1. Taisne O_2A krusto ω_1 punktā B_1, bet ω_2 – punktā C_2 (skat. 10. att.). Pierādīt, ka $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$.



10. att.

4. Pierādīt, ka nevienādība $\frac{a}{b}(a+1)^2 + \frac{b}{a}(b+1)^2 \geq 2(a+1)(b+1)$ ir spēkā visiem reāliem pozitīviem skaitļiem a un b.
5. Atrast visus pirmskaitļu pārus (m, n), kuriem $20m + 19n = 2019$.

12. klase

1. Urnā atrodas 66 baltas un nezināms skaits melnu lodīšu. Ja uz labu laimi tiek izvilktas divas lodītes, tad varbūtība, ka abas lodītes būs vienā krāsā, sakrīt ar varbūtību, ka lodītes būs dažādās krāsās. Cik melno lodīšu atrodas urnā?
2. Brigita ir iedomājusies naturālu skaitli, kas nepārsniedz 60. Indra drīkst Brigitai uzdot jautājumus, uz kuriem atbilde ir “jā” vai “nē”. Kā, uzdodot sešus jautājumus, Indra noteikti var uzzināt Brigitas iedomāto skaitli?
3. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir O. Nogriežņi OA, OB, OC krusto šo riņķa līniju attiecīgi punktos D, E, F. Zināms, ka $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir regulārs!
4. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība $\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b - c|$.
5. Pierādīt, ka vienādojumam $(a-b)^2 = a + b$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos!

9. klase

1. Reālus skaitļus a un b saista sakarība $\frac{4a^2-7b^2}{ab} = 12$. Kāda var būt $\frac{4a^2+7b^2}{ab}$ vērtība?
2. Uz trijstūra ABC malām AC un BC attiecīgi atlikti punkti M un N. Nogriežņi AN un BM krustojas punktā P. Aprēķināt trijstūra ABC laukumu, ja $S(AMP) = S(BNP) = 8$ un $S(NMP) = 4$.
3. Vai naturāla skaitļa kvadrāta ciparu summa var būt **a)** 19, **b)** 2019?
4. Sākotnēji katrā kvadrāta 5×5 rūtiņā atradās tieši viena skudra. Tad katra skudra pārvietojās uz kādu blakus rūtiņu (tas ir, uz rūtiņu, kam ar esošo ir kopīga mala). Kāds tagad ir **a)** mazākais; **b)** lielākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits?
5. Hokeja turnīrā piedalījās 16 komandas. Katra komanda ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Apzīmēsim katras komandas uzvaru un zaudējumu skaitu attiecīgi ar x_i un y_i, $i = 1;\ 2;\ \dots;\ 16$. Pierādīt, ka
$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{16}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{16}^2$$

10. klase

1. Pierādīt, ka visus naturālos skaitļus, kas lielāki nekā 100, var izteikt kā pirmskaitļa un salikta skaitļa summu!
2. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāle AC ir leņķa A bisektrise, $AC = AD$ un $\sphericalangle B = 90°$. Trijstūrī ADC novilkts augstums DH. Pierādīt, ka taisne BH sadala nogriezni CD uz pusēm!
3. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $13^n + 7^n + 2019$ vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!
4. Komisijā ir 7 cilvēki. Ierodoties uz sēdi, daži no viņiem sarokojas. Kāds ir mazākais iespējamais sarokošanos skaits, lai no katriem trim komisijas locekļiem varētu atrast divus, kas savā starpā sarokojušies?
5. Dots, ka $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{1000}$ un $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1000} = 1$. Pierādīt, ja n ir naturāls skaitlis un $1 \leq n \leq 1000$, tad
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{1}{1000}$$

11. klase

1. Kādā valstī ir 100 pilsētas. Starp dažām no tām organizēti avioreisi. Starp katrām divām pilsētām ir augstākais viens reiss. Katrs reiss savieno tikai 2 pilsētas, pa ceļam nenolaižoties citās. Katrs reiss „darbojas” abos virzienos. Reisus organizē 90 aviokompānijas, katra aviokompānija organizē tieši 30 reisus. Ja kompānija organizē reisu starp kādām divām pilsētām (apzīmēsim tās ar A un B), tad tai ir biroji gan pilsētā A, gan pilsētā B. Pierādīt, ka ir tāda pilsēta, kurā ir vismaz 9 biroji!
2. Ap četrstūri $ABCD$ apvilkta riņķa līnija. Taisne, kas ir paralēla BC un iet caur D, krusto nogriezni AC punktā M. Taisne, kas ir paralēla AB un iet caur punktu D, krusto nogriezni AC punktā N. Pierādīt, ka riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem AMD un DNC, pieskaras viena otrai!
3. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $13^n + 10^n + 7^n + 3^n$ vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!
4. Naturālu skaitļu virknes pirmie divi locekļi ir a_1 un a_2, turklāt $a_2 > a_1$. Katru nākamo virknes locekli, sākot ar trešo, aprēķina pēc formulas $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$. Kādai lielākajai indeksa i vērtībai a_i var būt vienāds ar $100a_1$?
5. Koordinātu plaknē doti **a)** 8; **b)** 9 punkti, katram no tiem koordinātas ir veseli skaitļi. Zināms, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Vai noteikti var atrast tādus trīs punktus, ka trijstūrim ar virsotnēm šajos punktos mediānu krustpunkta koordinātas arī ir veseli skaitļi?

1. Vienādojumam $x^3 - px + 2019 = 0$, kur p – naturāls skaitlis, ir trīs reālas saknes x_1, x_2, x_3. Kāda var būt izteiksmes $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ vērtība?

2. Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkta horda AB, kas neiet caur O. Caur punktu B novilkts perpendikuls pret AB, kas riņķa līniju vēlreiz krusto punktā D. Uz loka AB, kuram nepieder D, atzīmēts šī loka viduspunkts C. Taisnes AC un DB krustojas punktā E. Pierādīt, ka $OE^2 = OB^2 + 2 \cdot OB \cdot BE$.

3. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes

$$4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n + 10^n + 11^n + 12^n + 13^n$$

vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

4. Doti seši dažādi iracionāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties 3 skaitļus (apzīmēsim tos ar x, y, z) tā, ka visi trīs skaitļi $x + y$, $x + z$, $y + z$ ir iracionāli!

5. Atrast

a) vienu tādu naturālu skaitļu pāri $(a;\ b)$,

b) trīs tādus naturālu skaitļu pārus $(a;\ b)$, $a < b$,

ka lielākais skaitlis, ko nevar izteikt formā $an + bm$, kur m un n ir nenegatīvi veseli skaitļi, ir 2019.

2019./2020. mācību gads - Latvijas 70. matemātikas olimpiāde

Novada olimpiāde - 2020

9. klase

1. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 10 cm, bet perimetrs ir mazāks nekā 30 cm. Kāds var būt trijstūra sānu malas garums?

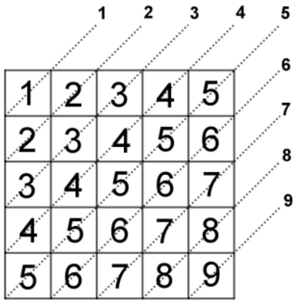
2. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2021}=\frac{1010}{2021}.$$

3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras punktā A (ω_2 atrodas ω_1 iekšpusē) un ω_1 centrs neatrodas ω_2 iekšpusē. Riņķa līnijas ω_1 diametrs AB šķērso ω_2 punktā C. Zināms, ka ω_1 hordas DE, kas iet caur C perpendikulāri AB, garums sakrīt ar BC garumu. Aprēķināt ω_1 un ω_2 diametru garumu attiecību $\frac{AB}{AC}$.

4. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N, katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k, atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N=4$, **b)** $N=5$?

5. Dota $N\times N$ rūtiņu tabula, kurā visas diagonāles ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz $2N-1$. Visās rūtiņās, kas pieder vienai diagonālei, ierakstīts šīs diagonāles numurs (piemēram, 11. att. parādīts tabulas aizpildījums, ja $N=5$). Pierādīt, ka visām naturālām N vērtībām visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kubs!



11. att.

10. klase

1. Pierādīt, ka katram naturālam n izpildās vienādība

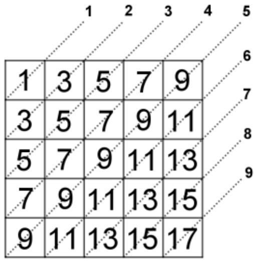
$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

2. Vai eksistē tāds dažādmalu trijstūris, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, kas veido ģeometrisko progresiju?

3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras punktā A (ω_2 atrodas ω_1 iekšpusē) un ω_1 centrs neatrodas ω_2 iekšpusē. Riņķa līnijas ω_1 diametrs AB šķērso ω_2 punktā C. Pieskares BF, kas no B vilkta pret ω_2, un ω_1 hordas DE, kas iet caur C perpendikulāri AB, garumi sakrīt. Aprēķināt ω_1 un ω_2 diametru garumu attiecību $\frac{AB}{AC}$.

4. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N, katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k, atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N=6$, **b)** $N=7$?

5. Dota $N\times N$ rūtiņu tabula, kurā visas diagonāles ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz $2N-1$. Katram i, kur $1\le i\le 2N-1$ visās rūtiņās, kas pieder diagonālei ar numuru i, ierakstīts i-tais nepāra skaitlis pēc kārtas (piemēram, 12. att. parādīts tabulas aizpildījums, ja $N=5$). Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu N vērtību, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts!



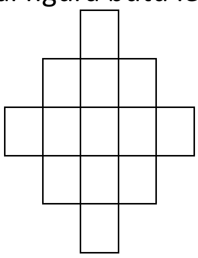
12. att.

11. klase

1. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ dalās ar 17.
2. Bezgalīgas augošas aritmētiskās progresijas locekļi ir naturāli skaitļi. Pierādīt, ka tajā ir tāds loceklis, kurā desmit cipari pēc kārtas ir piecinieki!
3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 ārēji pieskaras. Taisne t pieskaras ω_1 punktā A, bet ω_2 – punktā B. Ir novilkts ω_1 diametrs AC un no punkta C – pieskare CD pret ω_2 (D – pieskaršanās punkts). Pierādīt, ka $AC = CD$!
4. Pa apli uzrakstīti 10 naturāli skaitļi, kuru summa ir 100. Zināms, ka jebkuru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir vismaz 29. Kādu lielāko vērtību var pieņemt lielākais no šiem desmit skaitļiem?
5. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $n^3 = (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3$.

12. klase

1. Virkne (x_n) definēta rekurenti: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -29$ un $x_{n+3} = 9x_{n+2} - 26x_{n+1} + 24x_n$ visiem naturāliem n. Pierādīt, ka $x_n = 2^n + 3^n - 4^n$ visiem naturāliem n.
2. **a)** Parādi vienu veidu, kā 13. att. figūras katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli tā, lai jebkurā taisnstūrī 1×3 vai 3×1 ierakstīto skaitļu summa būtu 2020 un arī visu trīspadsmit ierakstīto skaitļu summa būtu 2020. **b)** Parādi, kā prasīto izdarīt, lai figūrā būtu ierakstīti pēc iespējas vairāk dažādi skaitļi!


13. att.

3. Dots trijstūris ABC, kurā $\sphericalangle A < \sphericalangle C$. Uz malas BC pagarinājuma izvēlēts punkts D tā, ka B atrodas starp C un D un $BD = AB$. Uz leņķa ABC bisektrises izvēlēts punkts E tā, ka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACB$. Nogriežņi BE un AC krustojas punktā F. Taisne, kas novilkta caur punktu E paralēli CD, krusto nogriezni AD punktā G. Pierādīt, ka $AG = BF$.
4. Debesskrāpī, kurā strādā profesors Cipariņš, ir 500 stāvi un tā liftā ir neparasta vadības pults: tajā var ievadīt naturālu skaitli n, kas nepārsniedz 100, nospiest pogu <uz augšu> vai < uz leju> un lifts brauks n stāvus attiecīgi uz augšu vai uz leju. Tā, piemēram, parasti profesors Cipariņš, lai aizbrauktu no 1. stāva uz savu kabinetu 314. stāvā, brauc uz augšu trīs reizes pa 100 stāviem, un tad vienu reizi 13 stāvus uz augšu.

   Diemžēl šorīt izrādījās, ka lifts ir salūzis, un reizēm tas brauc nepareizā virzienā, tas ir, var gadīties, ka tā vietā, lai brauktu n stāvus uz augšu, tas aizbrauc n stāvus uz leju (un otrādi). Parādiet, kā ar salūzušo liftu profesors Cipariņš var nokļūt no 1. stāva uz savu kabinetu 314. stāvā, ja zināms, ka lifts nekad neaizbrauc nepareizi 7 reizes pēc kārtas, tas ir, ja tas ir sešas reizes pēc kārtas kļūdījies, tad septītajā tas noteikti aizbrauks pareizajā virzienā.

   Piezīme. Lifts nebrauc zemāk par 1. un augstāk par 500. stāvu. Ja, piemēram, tam jābrauc no 3. stāva 5 stāvus uz leju, tas aizbrauc līdz 1. stāvam un tur apstājas.

5. Zināms, ka naturāli skaitļi x un y ir tādi, ka $x^2 + y^2 + 1$ dalās ar 13. Pierādīt:

a) $x^2 - y^2$ nedalās ar 13,

b) tieši viens no skaitļiem x^4, y^4, $x^4 + y^4 + 1$ dalās ar 13.

Valsts olimpiāde - 2020

9. klase

1. Kādām naturālām n vērtībām izteiksmes $\frac{(3n-1)(n+4)}{n+2}$ vērtība ir vesels skaitlis?
2. Atrast visus naturālos skaitļus B intervālā $1 < B < 99$, kuriem izpildās šāda īpašība: jebkuram naturālam skaitlim C, kuram $B < C < 100$ ir spēkā $B \leq V \leq C$, kur $V = \frac{1+B+C+100}{4}$ ir skaitļu 1, B, C, 100 vidējais aritmētiskais.
3. Punkts R atrodas uz stara OB un punkti P un Q atrodas uz stara OA tā, ka $OP < OQ$ un $\sphericalangle ORP = \sphericalangle BRQ$. Leņķa RPA bisektrise krusto staru OB punktā T. Pierādīt, ka QT ir $\sphericalangle RQA$ bisektrise!
4. Vai eksistē tādi četri dažādi **a)** naturāli skaitļi, **b)** pirmskaitļi a, b, c, d, ka vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:
   - $b + c + d$ dalās ar a,
   - $c + d + a$ dalās ar b,
   - $d + a + b$ dalās ar c,
   - $a + b + c$ dalās ar d?
5. Vai kubu ar izmēriem $12 \times 12 \times 12$ iespējams salikt no ķieģeļiem, kuru izmēri ir $1 \times 1 \times 8$?

10. klase

1. Pierādīt, ka skaitlim $2019^3 + 2020^3 + 2021^3$ ir vismaz 20 dažādi pozitīvi dalītāji!
2. Zināms, ka $x^2 + y^2 + xy = 3$. Kāda var būt $x + y$ vērtība?
3. Taisnleņķa trijstūrī ABC, kurā $\sphericalangle ABC = 90°$, novilkts augstums BD, nogriežņa BD viduspunkts ir E. Punkti F un G ir attiecīgi nogriežņu AD un CD viduspunkti. Pierādīt, ka $\sphericalangle AEC + \sphericalangle FBG = 180°$.
4. Aplūkojam skaitļu virkni 7; 737; 73737; 7373737; ..., kuras pirmais loceklis ir 7 un katru nākamo iegūst, iepriekšējam pierakstot galā 37. Pierādīt, ka neviens šīs virknes loceklis nedalās ar 17.
5. Dotas četras pēc ārējā izskata vienādas monētas, katras monētas masa ir 20 g vai 21 g. Kā noteikt katras monētas masu ar trīs svēršanām uz elektroniskajiem svariem, kas rāda uz svariem uzlikto monētu kopējo masu?

11. klase

1. Dota funkcija $f(x) = mx^2 + (m-1)x + \frac{2020}{m-2019}$. Ar kādām parametra m vērtībām funkcija ir augoša intervālā $(1; 2)$?
2. Aplūkojam virkni 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; ..., kurā katrs naturālais skaitlis k tiek atkārtots k reizes. Pierādīt, ka šīs virknes n-to locekli var aprēķināt pēc formulas $\left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$.

   Ar $[x]$ apzīmējam skaitļa veselo daļu, tas ir, lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Piemēram, $[3{,}1] = 3$, $[17] = 17$, $[6{,}99] = 6$.
3. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt, ka trijstūros ABC, BCD, CDA, DAB ievilkto riņķa līniju centri ir taisnstūra virsotnes!
4. Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas reālas saknes. Vai var gadīties, ka šīs saknes ir **a)** veseli skaitļi, **b)** racionāli skaitļi?

5. Atrast lielāko naturālo skaitli N, kuram ir spēkā īpašība: lai kuras N rūtiņas būtu aizkrāsotas 4×4 rūtiņu tabulā, vienmēr varēs izvēlēties divas rindas un divas kolonnas tā, ka katra aizkrāsotā rūtiņa atrodas vai nu izvēlētajā rindā, vai izvēlētajā kolonnā (vai abās).

12. klase

1. Ģeometriskās progresijas pirmais, desmitais un 2020-ais loceklis ir naturāls skaitlis. Vai noteikti arī tās 2019-ais loceklis ir naturāls skaitlis?
2. Noteikt izteiksmes $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ vislielāko un vismazāko vērtību, ja $1 \leq x, y, z \leq 2020$.
3. Riņķa līnijā ω ievilkta vienādsānu trapece $ABCD$, punkts H ir garākā pamata AB viduspunkts. Punkts M ir viduspunkts tam lokam AB, kas nesatur punktus C un D. Taisnes CD un AM krustojas punktā X. Zināms, ka nogriežņi HX, DM un AC krustojas vienā punktā Y un $DM = AC$. Pierādīt, ka $AB^2 = 2CD^2$.
4. Zināms, ka četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ir trīs reālas saknes. Vai var gadīties, ka visas šīs saknes ir **a)** veseli skaitļi, **b)** racionāli skaitļi?
5. Kādā valstī ir 2020 pilsētas, katra ar katru ir savienota ar ceļu, ceļi ārpus pilsētām nekrustojas (izmantoti viadukti). Biznesmenis ar ceļu pārvaldi spēlē šādu spēli: katru dienu biznesmenis privatizē vienu ceļu, bet ceļu pārvalde nojauc desmit neprivatizētus ceļus. Pierādīt, ka biznesmenis var panākt, ka pēc kāda laika viņam pieder ciklisks ceļu maršruts kas iet caur tieši 70 pilsētām, katrā iegriežoties tieši vienu reizi!

9. klase

9.1. Koka sija sver 90 kg, bet par 2 m garāka dzelzs sija sver 160 kg, pie tam viens metrs dzelzs sijas sver par 5 kilogramiem vairāk nekā viens metrs koka sijas. Cik sver viens metrs katras sijas?

Atrisinājums. Koka sijas garumu apzīmējam ar x, bet dzelzs sijas garumu – ar $x+2$. Tad viens metrs koka sijas sver $\frac{90}{x}$ kg, bet viens metrs dzelzs sijas sver $\frac{160}{x+2}$ kg. Tā kā viens metrs dzelzs sijas sver par 5 kilogramiem vairāk nekā viens metrs koka sijas, tad iegūstam vienādojumu $\frac{160}{x+2}-\frac{90}{x}=5$.

Tā kā x un $x+2$ ir siju garumi, tad $x>0$ un $x+2>0$. Vienādojuma abas puses reizinot ar $x(x+2)>0$, iegūstam:

$$160x-90(x+2)=5x(x+2);$$
$$32x-18(x+2)=x(x+2);$$
$$32x-18x-36=x^2+2x;$$
$$x^2-12x+36=0.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $x_1=x_2=6$.

Tātad viens metrs koka sijas sver $90:6=15$ kg un viens metrs dzelzs sijas sver $160:8=20$ kg.

Vērtēšanas kritēriji

Nezināmo lielumu izvēle un apzīmēšana	1
Viena metra koka sijas masas izteikšana	1
Viena metra dzelzs sijas masas izteikšana	1
Sastādīts vienādojums	1
Atrisināts vienādojums	5
Uzrakstīta atbilde	1
Uzrakstīta tikai atbilde	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	99	142	70	35	37	22	7	17	14	29	225
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,92								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir klasisks teksta uzdevums, ko risina skolas kursā.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) mainīgo ieviešana un vienādojuma sastādīšana,
2) daļveida vienādojuma atrisināšana.

9.2. Pierādīt, ka $9x^6-x^3+1>0$ visiem reāliem x.

1. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(3x^3)^2-2\cdot 3x^3\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}>0;$$
$$\left(3x^3-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}>0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $\frac{35}{36}$ ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

2. atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$18x^6 - 2x^3 + 2 > 0;$$
$$x^6 - 2x^3 + 1 + 17x^6 + 1 > 0;$$
$$(x^3 - 1)^2 + 17x^6 + 1 > 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, saskaitāmais $17x^6$ ir nenegatīvs un skaitlis 1 ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

Vērtēšanas kritēriji

Par ekvivalentiem pārveidojumiem, pilnā kvadrāta atdalīšanu	7
Izdarīts secinājums par iegūtās nevienādības patiesumu	2
Secināts, ka arī dotā nevienādība ir patiesa	1
Pamatots, ka nevienādība izpildās visiem $x \leq 0$	5
Par atsevišķiem piemēriem dažām x vērtībām	1-2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	183	155	113	28	21	35	14	21	22	28	77
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,07								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir standartuzdevums par nevienādību pierādīšanu, atdalot pilno kvadrātu (skat. teoriju pielikumā).

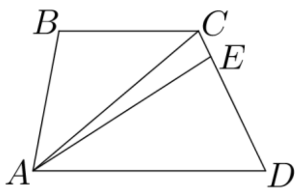
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana.

9.3. Trapeces $ABCD$ pamatu attiecība $BC:AD = 3:5$. Uz sānu malas CD atlikts punkts E tā, ka nogrieznis AE dala trapeces laukumu uz pusēm. Kādā attiecībā punkts E sadala sānu malu CD?

Atrisinājums. Tā kā $BC : AD = 3 : 5$, tad $S(ABC) : S(ACD) = 3 : 5$, jo šiem trijstūriem ir vienādi augstumi, kas sakrīt ar trapeces augstumu (skat. 14. att.). Tātad $S(ABC) = 3x$ un $S(ACD) = 5x$. Tad $S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD) = 3x + 5x = 8x$. Tā kā nogrieznis AE dala trapeces laukumu uz pusēm, tad $S(ABCE) = 4x$ un $S(AED) = 4x$.

Līdz ar to $S(ACE) = S(ACD) - S(AED) = 5x - 4x = x$. Tātad $S(ACE) : S(AED) = 1 : 4$. Tā kā šiem trijstūriem ir kopīgs augstums (no punkta A), tad $CE : ED = 1 : 4$ jeb punkts E dala malu CD attiecībā $1 : 4$.



14. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Pamato, ka $S(ABC) : S(ACD) = 3 : 5$	2
Izsaka $S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD) = 8x$	2
Iegūst, ka $S(ACE) = x$	2
Izsaka $S(ACE) : S(AED) = 1 : 4$	2
Uzraksta $CE : ED = 1 : 4$	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	28	398	131	56	21	5	6	8	7	14	2	28
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,25								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par trijstūra laukuma aprēķināšanu dažādos veidos,
2) laukumu izteikšana ar nezināmo un nezināmā lieluma aprēķināšana.

9.4. Naturālu skaitli sauksim par *pārdabisku*, ja, tā ciparus uzrakstot pretējā secībā, iegūst skaitli, kas ir lielāks nekā sākotnējais skaitlis, un iegūtais skaitlis dalās ar sākotnējo skaitli. Mazākais *pārdabiskais* skaitlis ir 1089, jo $9801 : 1089 = 9$. Atrast vēl divus citus *pārdabiskus* skaitļus!

Atrisinājums. Var ievērot, ka, pierakstot *pārdabiskam* skaitlim galā pašam sevi, arī iegūst *pārdabisku* skaitli, tāpēc der, piemēram, skaitļi 10891089 un 108910891089, jo $98019801 : 10891089 = 9$ un $980198019801 : 108910891089 = 9$.

Piezīme. *Pārdabisku* skaitļu ir bezgalīgi daudz, nākamie mazākie ir 2178; 10989; 21978; 109989; 219978; 1099989; 2199978; 10891089; 10999989; 21782178; 21999978.

Vērtēšanas kritēriji

Par katru atrastu skaitli	4
Par katru pārbaudi, ka atrastais skaitlis der	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	35	317	21	14	0	14	197	1	7	8	6	84
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,16								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par skaitļa sastāvu,
2) skaitļu dalīšana,
3) algoritma izstrādāšana.

9.5. a) Pierādīt, ka starp 1010 dažādiem naturāliem skaitļiem, no kuriem neviens nepārsniedz 2017, vienmēr iespējams izvēlēties trīs skaitļus tā, ka divu izvēlēto skaitļu summa ir vienāda ar trešo skaitli!

b) Vai šāda īpašība ir spēkā arī 1009 dažādiem naturāliem skaitļiem, kas nepārsniedz 2017?

Atrisinājums. a) Lielāko starp izvēlētajiem skaitļiem apzīmējam ar x un pierādīsim, ka var atrast divus citus skaitļus, kuru summa ir x.

Visus skaitļus, kas mazāki nekā x, sadalām pāros tā, ka vienā pārī esošo skaitļu summa ir x:

1) ja x ir nepāra skaitlis jeb $x = 2n + 1$, tad tie sadalās n pāros

$$(1;\ 2n),\ (2;\ 2n-1), \ldots, (n;\ n+1),$$

2) ja x ir pāra skaitlis jeb $x = 2n$, tad tie sadalās $n-1$ pāros

$$(1;\ 2n-1),\ (2;\ 2n-2), \ldots, (n-1;\ n+1),$$

skaitlim n pāra nav, to atstāsim vienu pašu.

Tā kā $x \leq 2017$, tad abos gadījumos $n \leq 1008$.

Tā kā ir izvēlēti 1009 skaitļi, kas mazāki nekā x, tad pēc Dirihlē principa vismaz divi no tiem būs no viena pāra, kas summā dod x, tie arī būs trīs meklētie skaitļi.

b) Savukārt 1009 dažādiem skaitļiem, kas nepārsniedz 2017, minētā īpašība nav spēkā. Ja izvēlamies visus nepāra skaitļus no 1 līdz 2017, tad izvēlēti ir 1009 skaitļi, no kuriem nekādi divi summā nedod citu skaitli no šī komplekta, jo divu nepāra skaitļu summa vienmēr ir pāra skaitlis.

Piezīme. Alternatīvi varam izvēlēties 1009 lielākos skaitļus (no 1009 līdz 2017), tad jebkuru divu šādu skaitļu summa būs lielāka nekā divu mazāko skaitļu summa, tas ir, $1009 + 1010 = 2019$, kas jau ir lielāka nekā vislielākais skaitlis 2017.

Vērtēšanas kritēriji

a) gadījums (kopā 6 punkti)	
Par pamatojumu	6
b) gadījums (kopā 4 punkti)	
Par pareizu atbildi	1
Par pareizu piemēru	3

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	41	331	143	49	35	42	28	14	11	7	2	1
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,32								

Skaidrojums par uzdevumu

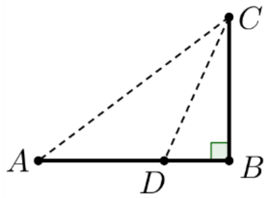
Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) gadījumu šķirošana un algoritma izstrāde,
2) piemēra atrašana atbilstoši uzdevuma nosacījumiem
3) vispārīga algoritma izveidošana.

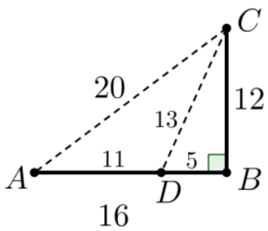
10. klase

10.1. Punkti A un B ir 16 km attālumā viens no otra, bet B un C ir 12 km attālumā. Šoseja $A - B - C$ punktā B izveido taisnu leņķi (skat. 15. att.). Ceļinieka ātrums pa šoseju ir v km/h, bet pa lauku ceļu ātrums ir c km/h. Ja ceļinieks dodas no A uz C pa šoseju (maršruts $A \to B \to C$), tad viņš nonāk galapunktā par 20 min ātrāk nekā ejot no A uz C pa lauku ceļu (maršruts $A \to C$). Ja turpretī viņš iet 11 km pa šoseju no A uz D un pēc tam uz C pa lauku ceļu (maršruts $A \to D \to C$), tad viņš ceļā pavada 5 stundas un 5 minūtes. Aprēķināt v un c!



15. att.

Atrisinājums. Izmantojot Pitagora teorēmu trijstūrī ABC, iegūstam $AC = 20$ km (skat. 20. att.). Tā kā $BD = AB - AD = 16 - 11 = 5$ km, tad, lietojot Pitagora teorēmu trijstūrī DBC, iegūstam, ka $CD = 13$ km.



16. att.

No uzdevuma nosacījumiem iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \dfrac{20}{c} - \dfrac{28}{v} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{13}{c} + \dfrac{11}{v} = \dfrac{61}{12} \end{cases}$$

Reizinot sistēmas pirmo vienādojumu ar 11 un otro ar 28, iegūstam

$$\begin{cases} \dfrac{220}{c} - \dfrac{308}{v} = \dfrac{11}{3} \\ \dfrac{364}{c} + \dfrac{308}{v} = \dfrac{427}{3} \end{cases}$$

Saskaitot abus vienādojumus, iegūstam $\frac{584}{c} = \frac{438}{3}$ jeb $c = 4$.

Ievietojot iegūto c vērtību pirmajā vienādojumā, aprēķinām otru nezināmo: $5 - \frac{28}{v} = \frac{1}{3}$ jeb $v = 6$.

Tātad ceļinieka ātrums pa šoseju $v = 6$ km/h, bet pa lauku viņa ātrums ir $c = 4$ km/h.

Vērtēšanas kritēriji

Aprēķināts AC garums	1
Aprēķināts CD garums	1
Sastādīts maršrutiem $A \to B \to C$ un $A \to C$ atbilstošais vienādojums	1
Sastādīts maršrutam $A \to D \to C$ atbilstošais vienādojums	1
Atrisināta vienādojumu sistēma	5
Uzrakstīta atbilde	1
Uzrakstīta tikai atbilde	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	20	27	236	115	68	41	19	14	21	20	88
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,11								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir klasisks teksta uzdevums, ko risina skolas kursā.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) fizikas formula $t = \frac{s}{v}$,
2) vienādojumu sistēmas sastādīšana un atrisināšana.

10.2. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0$, ja x, y – reāli skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + y + 1 > 0;$$

$$(x+y)^2 + \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{3}{4} > 0;$$

$$(x+y)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $\frac{3}{4}$ ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

Vērtēšanas kritēriji

Par ekvivalentiem pārveidojumiem, pilno kvadrātu atdalīšanu	7
Izdarīts secinājums par iegūtās nevienādības patiesumu	2
Secināts, ka arī dotā nevienādība ir patiesa	1
Pamatots, ka nevienādība izpildās visiem $x \geq 0, y \geq 0$	5
Par atsevišķiem piemēriem dažām x un y vērtībām	1-2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	15	101	47	115	54	28	15	8	22	20	61	190
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,19								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

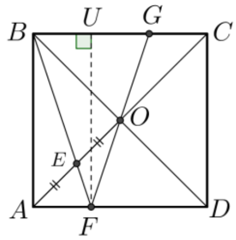
Uzdevums ir standartuzdevums par nevienādību pierādīšanu, atdalot pilno kvadrātu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana.

10.3. Kvadrāta $ABCD$ diagonāles krustojas punktā O, punkts E ir nogriežņa AO viduspunkts. Taisne BE krusto malu AD punktā F, bet taisne FO krusto malu BC punktā G. Pierādīt, ka trijstūris BFG ir vienādsānu!

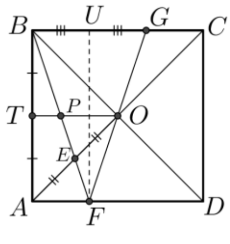
1. atrisinājums. Trijstūri AEF un CEB ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle AEF = \sphericalangle CEB$ kā krustleņķi un $\sphericalangle FAE = \sphericalangle BCE$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm (skat. 21. att.). Tā kā $AE = OE$ un $AO = OC$, tad $EC = 3AE$ un līdz ar to trijstūru CEB un AEF līdzības koeficients $k = \frac{EC}{AE} = 3$. Tātad $AF = x$ un $BC = 3x$.



17. att.

Trijstūri AOF un COG ir vienādi pēc pazīmes $\ell m \ell$, jo $\sphericalangle OAF = \sphericalangle OCG$ (iekšējie šķērsleņķi), $AO = OC$ un $\sphericalangle AOF = \sphericalangle COG$ (krustleņķi). Tāpēc $AF = CG = x$, no kā izriet, ka $BG = BC - CG = = 3x - x = 2x$. Trijstūrī BFG no punkta F novelkam augstumu FU. Ievērojam, ka četrstūris $ABUF$ ir taisnstūris, tāpēc $AF = BU = x$ kā taisnstūra pretējās malas. Esam ieguvuši, ka $UG = BG - BU = = 2x - x = x = BU$. Tātad FU ir trijstūra BFG mediāna. Tā kā FU trijstūrī BFG ir gan mediāna, gan augstums, tad trijstūris BFG ir vienādsānu trijstūris, kas arī bija jāpierāda.

2. atrisinājums. Savienojam diagonāļu krustpunktu O ar malas AB viduspunktu T, nogriežņa OT krustpunktu ar BE apzīmējam ar P (skat. 22. att.). Tad $OT||AD$, jo OT ir trijstūra ABD viduslīnija. Tā kā OT un BE ir trijstūra ABO mediānas, tad $PO : TP = 2 : 1$. Apzīmējam kvadrāta $ABCD$ malas garumu ar a. Tad $TP = \frac{1}{3}OT = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{a}{6}$. Nogrieznis TP ir trijstūra ABF viduslīnija, tāpēc $AF = 2TP = \frac{a}{3}$. Trijstūri AOF un COG ir vienādi pēc pazīmes $\ell m \ell$, jo $\sphericalangle OAF = \sphericalangle OCG$ (iekšējie šķērsleņķi), $AO = OC$ un $\sphericalangle AOF = \sphericalangle COG$ (krustleņķi). Tāpēc $GC = \frac{a}{3}$ un $BG = \frac{2a}{3}$.



18. att.

Savienojam punktu F ar nogriežņa BG viduspunktu U, tad FU ir trijstūra BFG mediāna un $BU = UG = \frac{a}{3}$. Četrstūris $ABUF$ ir taisnstūris, jo $BU = AF = \frac{a}{3}$ un $BU||AF$, un $\sphericalangle ABU = 90°$. Līdz ar to FU ir trijstūra BFG augstums. Tā kā FU trijstūrī BFG ir gan mediāna, gan augstums, tad trijstūris BFG ir vienādsānu trijstūris, kas arī bija jāpierāda.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Novilkts perpendikuls pret BC vai BA	1
Pierādīts, ka $AF = \frac{1}{3}AD$	5
Pamatots, ka $AF = GC$	2
Secina, ka FU ir gan augstums, gan mediāna	1
Izdara secinājumu par trijstūri BFG	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	13	345	153	68	34	19	12	6	7	8	5	6
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,14								

Skaidrojums par uzdevumu

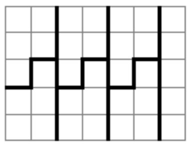
Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) līdzīgu trijstūru atrašana un līdzības izmantošana,
2) vienādsānu trijstūra pazīme – ja trijstūra mediāna vienlaicīgi ir arī augstums, tad trijstūris ir vienādsānu.

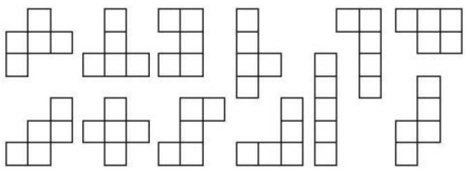
10.4. Dots taisnstūris ar izmēriem 7×5 rūtiņas. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas sagriezts septiņās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 5 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!

Atrisinājums. Mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums ir 24 vienības, skat., piemēram, 23. att.

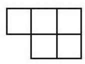


19. att.

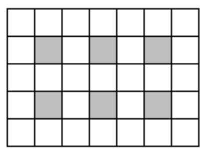
Pierādīsim, ka nav iespējams iegūt mazāku griezuma līniju kopgarumu. Pieņemsim, ka taisnstūris ir sagriezts 7 daļās, kuru perimetri ir $P_1, P_2, \ldots, P_7$, un griezuma līniju kopgarums ir L. Aplūkojam summu $P_1 + P_2 + \ldots + P_7$. Šajā summā katrs griezuma posms ir ieskaitīts divas reizes, bet katras daļas ārmalas posms – vienu reizi. Tā kā taisnstūra perimetrs ir $(7+5) \cdot 2 = 24$, tad iegūstam $P_1 + P_2 + \ldots + P_7 = 2L + 24$ jeb $L = \frac{P_1 + P_2 + \ldots + P_7 - 24}{2}$. Tātad L būs minimāls, ja perimetru summa būs vismazākā. Apskatīsim, kādas figūras, kuru laukums ir 5 rūtiņas, var iegūt, griežot pa rūtiņu līnijām. Figūru, ko iegūst no pieciem vienības kvadrātiem, pievienojot tos vienu otram pa vesela garuma malām, sauc par pentamino. Pavisam ir 12 dažādi pentamino (skat. 20. att.).



20. att.



21. att.



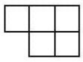
22. att.

No visām pentamino figūrām mazākais perimetrs ir 21. att. dotajai figūrai un tas ir 10 vienības, pārējām figūrām perimetrs ir 12.

Tagad pierādīsim, ka doto taisnstūri nevar sagriezt 7 šādās figūrās. Iekrāsojam rūtiņas, kā redzams 22. att., ievērojam, ka katra 21. att. figūriņa aizņem vismaz vienu iekrāsoto rūtiņu. Tad, ja būtu izdevies sagriezt taisnstūri 7 šādās figūras, tad būtu vajadzīgas vismaz 7 iekrāsotās rūtiņas, bet ir tikai 6, iegūta pretruna.

Tātad ir ne vairāk kā sešas 21. att. figūras un septītā figūra ir citādāka, turklāt tās perimetrs ir 12. Līdz ar to perimetru summa ir vismaz $6 \cdot 10 + 12 = 72$, un griezuma līniju garumu summa $L \geq \frac{72-24}{2} = 24$.

Vērtēšanas kritēriji

Parādīts piemērs, kur griezuma līniju kopgarums ir 24 vienības	4
Pamatots, ka L būs minimālais, ja daļu perimetru summa būs vismazākā	2
Uzrakstīts (var būt bez pamatojuma), ka vienas daļas mazākais iespējamais perimetrs ir 10 vienības	1
Uzrakstīts (var būt bez pamatojuma), ka visām daļām, kas nav , perimetrs ir 12	1
Pamatots, ka visām daļām perimetrs nevar būt 10 vienības	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	156	41	14	40	279	74	34	15	7	1	8
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,21								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatoriskā ģeometrija.

Šis ir uzdevums par figūrām rūtiņu plaknē, kura risināšanā noder zināšanas par pentamino (polimino, kas sastāv no 5 rūtiņām), bet svarīgākais uzdevumā ir izpratne par lauztas līnijas garuma aprēķināšanu.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) lauztas līnijas garuma aprēķināšana,
3) visu figūru (pentamino), kas sastāv no 5 rūtiņām, perimetru aprēķināšana,
4) invariantu metode – krāsošana.

10.5. Desmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizvietojot ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem, ieguva vārdu $MATEM\bar{A}TIKA$ (īsais “A” un garais “Ā” aizstāj atšķirīgus ciparus). Papildus zināms, ka skaitlis $\overline{MA}$ dalās ar 2, $\overline{MAT}$ – ar 3, $\overline{MATE}$ – ar 4, $\overline{MATEM}$ – ar 5, $\overline{MATEM\bar{A}}$ – ar 6, $\overline{MATEM\bar{A}T}$ – ar 7, $\overline{MATEM\bar{A}TI}$ – ar 8, $\overline{MATEM\bar{A}TIK}$ – ar 9, $\overline{MATEM\bar{A}TIKA}$ – ar 10. Noteikt, kāds bija sākotnējais desmitciparu skaitlis!

Atrisinājums. Ja skaitlis dalās ar 10, tā pēdējais cipars ir 0. Tātad $A = 0$.

Ja skaitlis dalās ar 5, tad tā pēdējais cipars ir vai nu 0, vai 5. Tā kā jau ieguvām, ka $A = 0$, tad $M = 5$.

Apskatām skaitļus $\overline{MAT} = \overline{50T}$ un $\overline{MATEM\bar{A}} = \overline{50TE5\bar{A}}$. No dalāmības pazīmes ar 3 izriet, ka

$$5 + 0 + T \text{ jādalās ar 3,} \qquad (1)$$

$$E + 5 + \bar{A} \text{ jādalās ar 3.} \qquad (2)$$

Tātad no (1) iegūstam, ka iespējamās T vērtības ir 1; 4 vai 7. Lai skaitlis dalītos ar pāra skaitli, tad nepieciešams, lai skaitļa pēdējais cipars būtu pāra. Tā kā $\overline{MATE}$ un $\overline{MATEM\bar{A}}$ jādalās attiecīgi ar 4 un 6, tad E un $\bar{A}$ ir jābūt pāra skaitļiem un, ņemot vērā (2), iegūstam, ka $E + \bar{A}$ iespējamās vērtības ir 4; 10 vai 16. Tā kā E un $\bar{A}$ jābūt dažādiem pāra skaitļiem, tad iespējama ir tikai summa 10, un der varianti $2 + 8$; $4 + 6$; $6 + 4$; $8 + 2$.

Tā kā $\overline{MATE}$ jādalās ar 4, tad no dalāmības pazīmes ar 4 izriet, ka $\overline{TE}$ jādalās ar 4, un līdzīgi no dalāmības pazīmes ar 8 iegūstam, ka $\overline{\bar{A}TI}$ jādalās ar 8. Pārbaudām visus iespējamos variantus atkarībā no T vērtības.

T	E	Ā	
1	2	8	$I = 6$ un, lai $\overline{MATEMĀTIK}$ dalītos ar 9, tad K būtu jābūt 8, kas neder, jo $Ā = 8$.
	6	4	Neder, jo 5016541 nedalās ar 7.
4	8	2	Neder, jo 5048524 nedalās ar 7.
7	2	8	Neder, jo 5072587 nedalās ar 7.
	6	4	$I = 2$ un $K = 9$, līdz ar to sākotnējais skaitlis bija **5076547290**.

Vērtēšanas kritēriji

Secināts, ka $A = 0$	1
Secināts, ka $M = 5$	1
Secināts, ka E un Ā ir pāra skaitļi	1
Secināts, kādas var būt iespējamās T vērtības	2
Secināts, ka $E = 6$ ir vienīgā derīgā vērtība	1
Secināts, ka $Ā = 4$ ir vienīgā derīgā vērtība	1
Secināts, ka $I = 2$	1
Secināts, ka $K = 9$	1
Uzrakstīts, kāds bija sākotnējais skaitlis	1
Uzrakstīts, kāds bija sākotnējais skaitlis bez pamatojuma	4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	54	27	11	47	142	53	47	33	26	20	107
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,79								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Uzdevums ir rēbuss par ciparu aizstāšanu ar burtiem.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) dalāmības pazīmes ar 3; 4; 5; 8; 10,
2) gadījumu šķirošana.

11. klase

11.1. Zināms, ka skaitļu a_1; a_2; a_3 summa ir 105 un tie veido aritmētisko progresiju, bet skaitļi a_1; a_2; $a_3 + 4$ veido ģeometrisko progresiju. Atrast visas iespējamās a_1; a_2; a_3 vērtības un pamatot, ka citu nav!

Atrisinājums. No aritmētiskās progresijas definīcijas izriet, ka $a_2 = a_1 + d$ un $a_3 = a_1 + 2d$, kur d ir diference. Līdz ar to iegūstam vienādojumu

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 105;$$
$$3a_1 + 3d = 105;$$
$$a_1 + d = 35;$$
$$a_1 = 35 - d.$$

Tā kā a_1; a_2; $a_3 + 4$ veido ģeometrisko progresiju, tad izpildās vienādība $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3+4}{a_2}$ jeb $a_2^2 = a_1(a_3 + 4)$. Izsakot a_1, a_2 un a_3 ar d, iegūstam

$$(35 - d + d)^2 = (35 - d)(35 - d + 2d + 4);$$
$$35^2 = (35 - d)(39 + d);$$
$$d^2 + 4d - 35 \cdot 39 + 35^2 = 0;$$
$$d^2 + 4d - 35 \cdot 4 = 0;$$
$$d^2 + 4d - 140 = 0.$$

Izmantojot Vjeta teorēmu, iegūstam $d_1 = 10$ un $d_2 = -14$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $a_1 = 25;\ a_2 = 35;\ a_3 = 45$ vai $a_1 = 49;\ a_2 = 35;\ a_3 = 21$.

Vērtēšanas kritēriji

Izsaka a_1, a_2, a_3, a_3+4, izmantojot a_1 un d	2
Uzraksta vienādojumu $a_1+a_2+a_3=105$ vai $a_1+a_1+d+a_1+2d=105$	1
Iegūst, ka $a_2^2=a_1(a_3+4)$	2
Aprēķina a_1 un d	4
Uzraksta atbildi	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	40	119	76	66	61	35	15	5	6	10	9	65
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,13								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir skolas kursa uzdevums par aritmētisko un ģeometrisko progresiju.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) aritmētiskās progresijas definīcija,
2) ģeometriskās progresijas īpašība $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$,
3) visu doto lielumu izteikšana ar diviem nezināmajiem,
4) vienādojuma sastādīšana un atrisināšana.

11.2. Pierādīt, ka $x^4+2x^3y+2xy^3+y^4\geq 6x^2y^2$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^4-2x^2y^2+y^4)+2x^3y+2xy^3-4x^2y^2\geq 0;$$
$$(x^2-y^2)^2+2xy(x^2+y^2-2xy)\geq 0;$$
$$(x^2-y^2)^2+2xy(x-y)^2\geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $xy>0$ pēc dotā, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem pozitīviem skaitļiem x un y.

Vērtēšanas kritēriji

Par ekvivalentiem pārveidojumiem, pilno kvadrātu atdalīšanu	7
Izdarīts secinājums par iegūtās nevienādības patiesumu	2
Secināts, ka arī dotā nevienādība ir patiesa	1
Par atsevišķiem piemēriem dažām x un y vērtībām	1-2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	21	91	76	41	12	11	9	11	32	15	81	107
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,15								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir standartuzdevums par nevienādību pierādīšanu, atdalot pilno kvadrātu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana.

11.3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x+z=2017 & (1) \\ 31xz=y^2 & (2) \end{cases}$$

Atrisinājums. No (2) izriet, ka y jādalās ar 31 jeb

$$y=31t \qquad (3)$$

un, tātad arī kādam no reizinātājiem x vai z jādalās ar 31. Turklāt dalīties ar 31 var tikai viens no šiem skaitļiem, pretējā gadījumā no (1) iegūtu, ka 2017 dalās ar 31, bet tā nav. Tā kā 2017 ir pirmskaitlis, tad x un z nav kopīgu dalītāju. Dotā vienādojumu sistēma ir simetriska attiecībā pret x un z, tāpēc pieņemsim, ka x dalās ar 31, tas ir,

$$x=31p \qquad (4)$$

(pieņemot, ka z dalās ar 31, visi spriedumi ir analoģiski).

Izmantojot (3) un (4), no (2) iegūstam, ka $31\cdot 31p\cdot z=(31t)^2$ jeb $pz=t^2$. Tā kā p un z nav kopīgu dalītāju, tad katram no skaitļiem p un z ir jābūt kāda naturāla skaitļa kvadrātam, tas ir, $p=p_1^2$ un $z=z_1^2$. Izmantojot (1) un (4), iegūstam $p=\frac{x}{31}=\frac{2017-z}{31}<\frac{2017}{31}$ jeb $p_1^2<\frac{2017}{31}<65$. Tātad $p_1\le 8$.

Izveidojam tabulu, kurā analizējam visas iespējamās p_1 vērtības.

p_1	$p=p_1^2$	$x=31p$	$z=2017-x$	z ir kvadrāts	Paskaidrojums
1	1	31	1986	nē	1986 dalās ar 2, bet nedalās ar 4
2	4	124	1893	nē	kvadrāta pēdējais cipars nevar būt 3
3	9	279	1738	nē	kvadrāta pēdējais cipars nevar būt 8
4	16	**496**	$\mathbf{1521=39^2}$	**jā**	
5	25	775	1242	nē	kvadrāta pēdējais cipars nevar būt 2
6	36	1116	901	nē	$30^2=900$ un $31^2=961$
7	49	1519	498	nē	kvadrāta pēdējais cipars nevar būt 8
8	64	1984	33	nē	kvadrāta pēdējais cipars nevar būt 3

Esam ieguvuši atrisinājumu $x=496$, $y=4836$, $z=1521$ un, tā kā vienādojumu sistēma ir simetriska attiecībā pret x un z, iegūstam otru atrisinājumu $x=1521$, $y=4836$, $z=496$.

Vērtēšanas kritēriji

Secināts, ka y dalās ar 31	1
Secināts, ka vai nu x, vai z (tieši viens no šiem skaitļiem) dalās ar 31	2
Secināts, ka x un z nav kopīgu dalītāju	1
Secināts, ka gan p, gan z ir naturālu skaitļu kvadrāti	1
Secināts, ka $p_1\le 8$	1
Pamatots, ka der tikai $p_1=4$	2
Uzraksta abus atrisinājumus	2
Tikai par atbildi	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	45	334	61	39	9	1	2	1	4	5	2	4
Vidēji iegūtais punktu skaits				0,56								

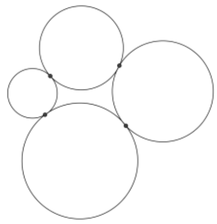
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ja vienādības vienas puses izteiksme dalās ar kādu skaitli, tad arī otras puses izteiksmei jādalās ar šo skaitli,
2) nezināmo novērtēšana un visu gadījumu apskatīšana.

11.4. Četras riņķa līnijas ārēji pieskaras tā, kā parādīts 23. att. Pierādīt, ka četrstūrim, ko veido riņķa līniju pieskaršanās punkti, var apvilkt riņķa līniju!

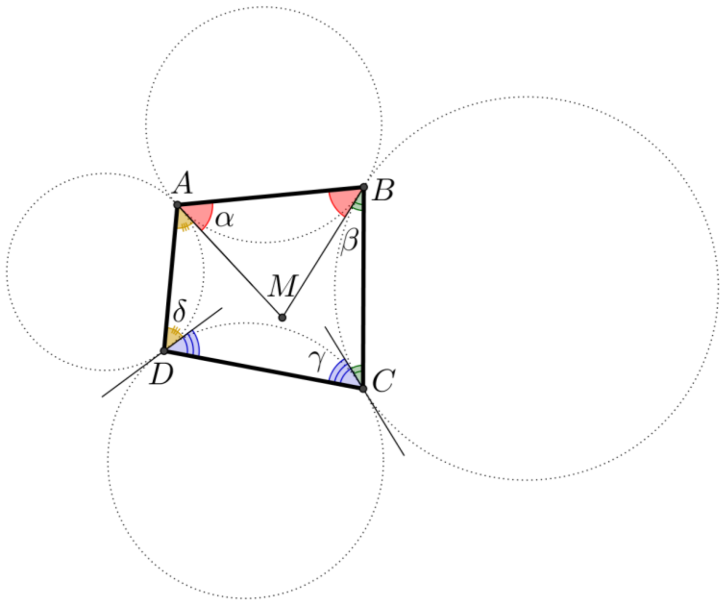


23. att.

Atrisinājums. Riņķa līniju pieskaršanās punktus apzīmējam ar A, B, C un D (skat. 24. att.). Novelkam doto riņķa līniju kopīgās pieskares AM un BM. Trijstūris AMB ir vienādsānu, jo $AM = MB$ kā riņķa līnijas pieskaru nogriežņi, kas novilkti no punkta ārpus tās. Līdz ar to $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \alpha$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī. Līdzīgi iegūstam atlikušo leņķu pāru vienādības.

Ievērojam, ka $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360°$, no kurienes iegūstam, ka $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Tā kā $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, tad četrstūrim $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

Piezīme. Leņķu vienādību var pierādīt arī izmantojot hordas-pieskares leņķi.



24. att.

Vērtēšanas kritēriji

Uzraksta, ka četrstūrim var apvilkt riņķa līniju, ja tā pretējo leņķu summa ir 180°	2
Pamato, ka ΔAMB ir vienādsānu trijstūris	2
Secina, ka $\sphericalangle BAM = \sphericalangle ABM$	1
Izdara secinājumu par atlikušajiem leņķu pāriem	2
Parāda, ka četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	37	224	63	91	30	10	9	1	5	2	5	30
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,70								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

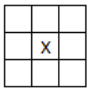
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pieskaru nogriežņu īpašība,
2) ja četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$, tad ap to var apvilkt riņķa līniju.

11.5. Antra un Baiba spēlē spēli uz 3×3 rūtiņu laukuma. Spēlētājas gājienus izdara pēc kārtas, katrā gājienā kādā no tukšajām rūtiņām ierakstot vai nu nullīti, vai krustiņu (katra spēlētāja katrā gājienā var rakstīt jebkuru no šiem simboliem). Kad viss laukums aizpildīts, tiek saskaitīts spēles rezultāts. Par katru rindu, kolonnu un diagonāli (tādu, kas satur 3 rūtiņas), ja tajā ir pāra skaits krustiņu, punktu saņem Antra, bet, ja krustiņu skaits ir nepāra, tad punktu saņem Baiba. Uzvar spēlētāja, kuras punktu kopsumma ir lielāka. Pierādīt, ka spēlētājai, kura sāk spēli, ir uzvaroša stratēģija, un aprakstīt to!

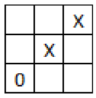
Atrisinājums. Aplūkosim gadījumu, ka pirmā gājienu izdara Antra un izmanto tālāk aprakstīto stratēģiju.

Pirmajā gājienā centrālajā rūtiņā Antra ieliek krustiņu (skat. 25. att.).



25. att.

Uz katru Baibas gājienu Antra atbild, ieliekot pretēju simbolu rūtiņā, kas ir simetriska attiecībā pret kvadrāta centru. Piemēram, uz Baibas gājienu „0” laukuma kreisā apakšējā stūrī, Antra atbild ar „x” laukuma augšējā labajā stūrī (skat. 26. att.).



26. att.

Tādējādi pēc katra Antras gājiena veidojas viens trijnieks, kas iet caur centrālo rūtiņu un Antra saņem punktu. Šādi par otro rindu, otro kolonnu un abām diagonālēm Antra kopā iegūst 4 punktus. Ja aplūko pirmo un trešo kolonnu, tad simetrijas dēļ vienā kolonnā punktu ir ieguvusi viena spēlētāja, bet otrā – otra spēlētāja. Tas pats attiecas uz pirmo un trešo rindu. Tātad aprakstītā stratēģija vienmēr garantē Antras uzvaru ar rezultātu 6:2.

Ievērosim, ka spēle ir simetriska attiecībā uz izmantotajiem simboliem – pāra skaits krustiņu kādā virzienā nozīmē nepāra skaitu nullīšu un otrādi. Tātad, ja pirmā gājienu izdara Baiba, tad viņai centrālajā rūtiņā jāieliek „0” un tālāk jāspēlē pēc iepriekš aprakstītās stratēģijas.

Vērtēšanas kritēriji

Aprakstīta stratēģija, kā Antrai jāspēlē, ja viņa sāk	5
Aprakstīta stratēģija, kā Baibai jāspēlē, ja viņa sāk	5
Ideja par simetrijas izmantošanu	2
Pirmo kauliņu ieliek centrā	1
Apskatīti daži atsevišķi piemēri	1-2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	15	117	112	56	35	25	41	34	16	20	10	26
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,94								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Uzdevums ir matemātiska spēle, kuras risināšanā galvenā ideja ir simetrijas izmantošana.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) gadījumu šķirošana,
2) simetrija pret punktu,
3) uzvarošās stratēģijas izstrāde.

12.1. Jebkuriem diviem pozitīviem skaitļiem x un y piekārtots trešais skaitlis $x^{\lg y}$, ko apzīmēsim ar $x * y$. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem x, y un z izpildās $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Atrisinājums. Pierādāmā vienādība $(x * y) * z = x * (y * z)$ ir ekvivalenta vienādībām:

$$x^{\lg y} * z = x * y^{\lg z};$$
$$\left(x^{\lg y}\right)^{\lg z} = x^{\lg(y^{\lg z})};$$
$$x^{\lg y \cdot \lg z} = x^{\lg z \cdot \lg y}.$$

Pēdējā vienādība ir patiesa, tātad pozitīviem skaitļiem x, y un z izpildās $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Vērtēšanas kritēriji

Doto vienādību pārraksta formā $\left(x^{\lg y}\right)^{\lg z} = x^{\lg y^{\lg z}}$	4
Vienādības kreiso pusi pārraksta formā $x^{\lg y \cdot \lg z}$	2
Vienādības kreiso pusi pārraksta formā $x^{\lg z \cdot \lg y}$	3
Secina, ka abas vienādības puses ir vienādas un dotā vienādība ir patiesa	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	44	238	47	13	1	7	4	9	1	2	17	52
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,23								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevuma risināšanā svarīgākais ir izpratne par jaunu definēto darbību.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) logaritma īpašība $log_a x^k = k \cdot log_a x$,
2) reizinājums nemainās, ja reizinātājus maina vietām, tas ir, $a \cdot b = b \cdot a$.

12.2. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + 4 \geq 2x - 2y - xy$, ja x, y – reāli skaitļi!

Atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^2 + 2y^2 + 8 \geq 4x - 4y - 2xy;$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + y^2 + 4y + 8 \geq 0;$$
$$(x + y)^2 + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) \geq 0;$$
$$(x + y)^2 + (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir trīs nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

Vērtēšanas kritēriji

Par ekvivalentiem pārveidojumiem, pilno kvadrātu atdalīšanu	7
Izdarīts secinājums par iegūtās nevienādības patiesumu	2
Secināts, ka arī dotā nevienādība ir patiesa	1
Par atsevišķiem piemēriem dažām x un y vērtībām	1-2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	13	61	57	83	39	21	8	8	9	13	22	101
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,45								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir standartuzdevums par nevienādību pierādīšanu, atdalot pilno kvadrātu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana.

12.3. Naturālu skaitli sauksim par *pārdabisku*, ja, tā ciparus uzrakstot pretējā secībā, iegūst skaitli, kas ir lielāks nekā sākotnējais skaitlis, un iegūtais skaitlis dalās ar sākotnējo skaitli. Mazākais *pārdabiskais* skaitlis ir 1089, jo $9801 : 1089 = 9$. **a)** Atrast vēl divus citus *pārdabiskus* skaitļus! **b)** Pierādīt, ka *pārdabisku* skaitļu ir bezgalīgi daudz!

Atrisinājums. a) Nākamie *pārdabiskie* skaitļi ir 2178; 10989; 21978; 109989; 219978; 1099989; 2199978; 10891089; 10999989; 21782178; 21999978.

b) Aplūkojam skaitļus, ko veido pierakstot skaitlim 1089 beigās k ($k >$1) reizes skaitli 1089, tas ir, skaitļus formā 10891089…1089. Šāda "pierakstīšana galā" ir līdzvērtīga skaitļa reizināšanai ar skaitli 100010001…0001, kurā ir k vieninieki un starp diviem blakus vieniniekiem ir trīs nulles. No uzdevuma nosacījumiem, zinot, ka $9801 = 1089 \cdot 9$, iegūstam

$$10891089 \ldots 1089 \cdot 9 = 1089 \cdot 10001 \ldots 001 \cdot 9 = 9801 \cdot 10001 \ldots 001 = 98019801 \ldots 9801.$$

Rezultātā ir iegūts sākotnējais skaitlis, kura cipari ir uzrakstīti pretējā secībā. Tā kā k var būt jebkurš naturāls skaitlis, tad esam pierādījuši, ka *pārdabisku* skaitļu ir bezgalīgi daudz.

Piezīme. Var pierādīt arī, ka visi skaitļi, kas iegūti no 1089 vai 2178, ierakstot tiem vidū patvaļīgu skaitu devītnieku, ir pārdabiski, bet šajā gadījumā pierādījums ir sarežģītāks.

Vērtēšanas kritēriji

a) gadījums (kopā 5 punkti)	
Par katru atrastu skaitli	2
Par pārbaudi, ka abi skaitļi der	1
b) gadījums (kopā 5 punkti)	
Izvirzīta pareiza hipotēze par pārdabisku skaitļu konstrukciju bez pierādījuma	2
Pierādījums, ka konstrukcijas rezultātā iegūtie skaitļi ir pārdabiski	3

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	43	170	4	26	78	5	12	4	39	26	6	22
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,92								

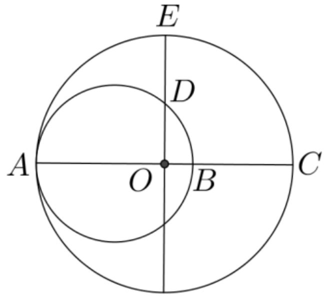
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par skaitļa sastāvu,
2) skaitļu dalīšana,
3) algoritma izstrāde.

12.4. Divas dažādas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā A. Lielākās riņķa līnijas centrs ir O un taisne OA krusto mazāko riņķa līniju punktā B, bet lielāko – punktā C. Lielākās riņķa līnijas diametrs, kas ir perpendikulārs OA, krusto mazāko riņķa līniju punktā D, bet lielāko – punktā E (punkts D atrodas starp O un E, skat. 31. att.). Aprēķināt abu riņķa līniju rādiusu garumus, ja $DE = 5$ un $BC = 7$.



27. att.

Atrisinājums. Lielākās riņķa līnijas rādiusa garumu apzīmējam ar R, tad $AO = OE = OC = R$, $OD = OE - ED = R - 5$ un $OB = OC - BC = R - 7$.

Trijstūris ADB ir taisnleņķa, jo $\sphericalangle ADB$ balstās uz mazākās riņķa līnijas diametra AB.

Taisnleņķa trijstūrī augstuma pret hipotenūzu kvadrāts ir vienāds ar katešu projekciju uz hipotenūzas reizinājumu, tas ir, $OD^2 = AO \cdot OB$ jeb $(R-5)^2 = R(R-7)$. Atrisinot iegūto vienādojumu, iegūstam $3R = 25$ jeb $R = \frac{25}{3}$. Mazākās riņķa līnijas rādiusa garums ir $\frac{AC-BC}{2} =$ $= \frac{50}{6} - \frac{7}{2} = \frac{29}{6}$.

Piezīme. Vienādību $OD^2 = AO \cdot OB$ var iegūt arī pamatojot, ka $\Delta AOD \sim \Delta DOB$.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējuma papildināšanu ar nogriežņiem AD un BD	1
Izteikts OD garums	1
Izteikts OB garums	1
Secina, ka ΔADB ir taisnleņķa	1
Iegūst (ar pamatojumu) vienādību $OD^2 = OA \cdot OB$	4
Iegūst un atrisina vienādojumu attiecībā pret R	2
Aprēķina r	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	22	127	52	39	27	44	9	2	3	5	9	96
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,72								

Skaidrojums par uzdevumu

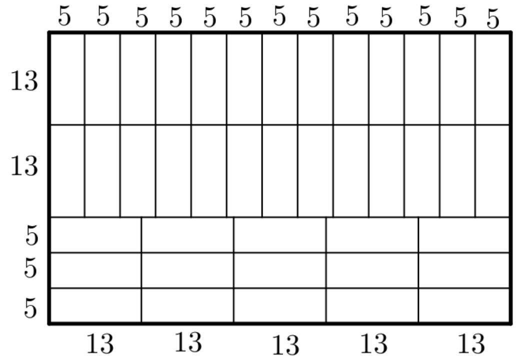
Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) Eiklīda formula – taisnleņķa trijstūrī augstuma pret hipotenūzu kvadrāts ir vienāds ar katešu projekciju uz hipotenūzas reizinājumu, tas ir, $h^2 = a_c \cdot b_c$,
2) trijstūru līdzība un atbilstošo malu attiecība,
3) vienādojuma sastādīšana un atrisināšana.

12.5. Kādu lielāko skaitu 5×13 rūtiņu taisnstūru var izgriezt no rūtiņu lapas, kuras izmēri ir **a)** 41×65; **b)** 47×65 rūtiņas?

Atrisinājums. a) Lielākais skaits taisnstūru 5×13, ko var izgriezt no rūtiņu lapas 41×65, ir 41, piemēram, skat. 28. att. Vairāk taisnstūrus nav iespējams izgriezt, jo $(41 \cdot 65) : (5 \cdot 13) = 41$.



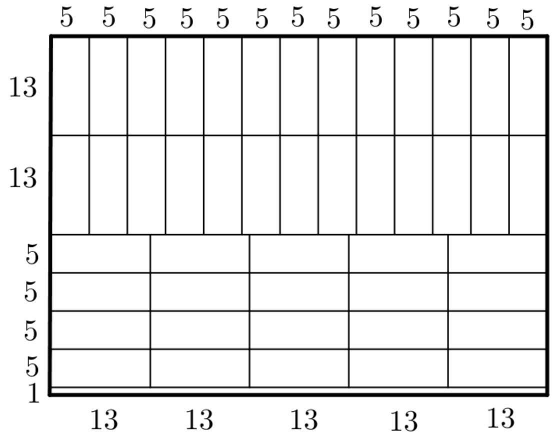
28. att.

b) No rūtiņu lapas 47×65 rūtiņas var izgriezt 46 taisnstūrus, skat., piemēram, 29. att.

Pierādīsim, ka 47 taisnstūrus izgriezt nevar. Ja varētu izgriezt 47 taisnstūrus, tad visa sākotnējā rūtiņu lapa būtu jāsagriež 5×13 rūtiņu taisnstūros. Pieņemsim, ka tas ir izdevies un aplūkosim 47 rūtiņu garo malu. Pieņemsim, ka pie šīs malas pieskaras m taisnstūri ar garo malu (13) un n – ar īso malu (5), tad $13m + 5n = 47$. Pamatosim, ka šim vienādojumam nav atrisinājuma nenegatīvos veselos skaitļos. Ja $m \geq 4$, tad vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir vismaz $13 \cdot 4 + 5n \geq$ $\geq 52 > 47$, tātad $m < 4$. Pārbaudām visas iespējamās m vērtības:

- ja $m = 0$, tad $n = \frac{47}{5}$;
- ja $m = 1$, tad $n = \frac{34}{5}$;
- ja $m = 2$, tad $n = \frac{21}{5}$;
- ja $m = 3$, tad $n = \frac{8}{5}$.

Nevienā gadījumā n nav nenegatīvs vesels skaitlis. Tātad 47 taisnstūros doto lapu sagriezt nav iespējams.



29. att.

Vērtēšanas kritēriji

a) gadījums (kopā 4 punkti)	
Par pareizu piemēru, kā var izgriezt 41 taisnstūri	3
Par pamatojumu, ka nevar izgriezt vairāk taisnstūrus	1
b) gadījums (kopā 6 punkti)	
Par atbildi, ka lielākais skaits taisnstūru, ko var izgriezt no rūtiņu lapas, ir 46	1
Par pareizu piemēru, kā var izgriezt 46 taisnstūrus	1
Par pamatojumu, ka nevar izgriezt vairāk taisnstūrus	4
Secināts, ka pie malas ar garumu 47 rūtiņas taisnstūri pieskaras gan ar īso, gan ar garo malu	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	100	65	35	23	31	21	57	36	12	19	31
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,67								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatoriskā ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par figūru sagriešanu,
2) rūtiņu skaita novērtēšana,
3) atbilstoša piemēra atrašana.

Valsts olimpiāde - 2017

9. klase

9.1. Doti 63 dažādi naturāli skaitļi, kuru summa ir 2017. Atrast šos skaitļus un pamatot, ka citu nav!

Atrisinājums. Der skaitļi 1, 2, 3, ..., 61, 62, 64. Pierādīsim, ka citu nav. Aplūkojam 63 mazākos naturālos skaitļus. To summa ir $1+2+\cdots+63=\frac{(1+63)\cdot 63}{2}=2016$. Meklēto skaitļu summa ir tikai par 1 lielāka –vienīgais veids, kā to iegūt, ir skaitli 63 aizstāt ar 64.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	7	6	1	8	0	1	0	9	1	3	29
Vidēji iegūtais punktu skaits				6,54								

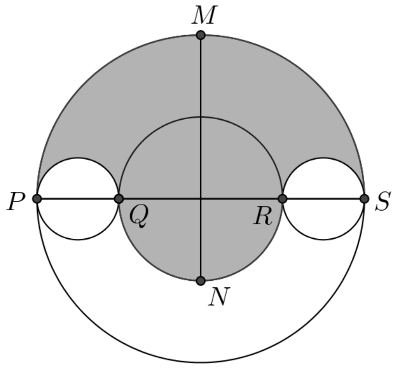
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ekstremālā elementa metode – mazāko saskaitāmo apskatīšana,
2) aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summas aprēķināšanas formula $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

9.2. Uz taisnes atlikti punkti P, Q, R un S tā, ka $PQ=RS$ (skat. 30. att.). Nogriežņi PQ, RS, PS, QR ir riņķu diametri. Nogrieznis MN ir iekrāsotās figūras simetrijas ass. Pierādīt, ka iekrāsotās figūras laukums ir vienāds ar laukumu riņķim, kura diametrs ir MN.



30. att.

Atrisinājums. Nogriežņu MN un QR krustpunktu apzīmējam ar O, $OQ=ON=OR=x$ (kā rādiusi) un $PQ=RS=y$. Simetrijas dēļ $OP=OS=OM=x+y$. Aprēķinām laukumus:

$$S_{MN}=\left(\frac{MN}{2}\right)^2\pi=\frac{(2x+y)^2}{4}\pi=\frac{\pi}{4}(4x^2+4xy+y^2)=\pi\left(x^2+xy+\frac{1}{4}y^2\right);$$

$$S_{iekrāsotais} = \frac{1}{2}S_{QR} + \frac{1}{2}S_{PS} - S_{PQ} = \frac{1}{2}OR^2\pi + \frac{1}{2}OS^2\pi - \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \pi$$
$$= \pi\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) =$$
$$= \pi\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 + xy + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{4}y^2\right) = \pi\left(x^2 + xy + \tfrac{1}{4}y^2\right).$$

Tātad esam pierādījuši, ka iekrāsotās figūras laukums ir vienāds ar laukumu riņķim, kura diametrs ir MN.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	11	4	7	7	0	5	2	2	2	3	19
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,21								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Uzdevumā svarīgākais ir izpratne par figūras laukuma aprēķināšanu.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) riņķa laukuma aprēķināšanas formula $S = \pi R^2$,
2) figūras laukuma izteikšana kā vairāku citu figūru laukumu summa vai starpība.

9.3. Naturālā piecciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, un ieguva pierakstu $GANGA$. Zināms, ka $GANGA$, dalot ar 7, dod atlikumu A, $GANGA$, dalot ar 11, dod atlikumu N, bet $GANGA$, dalot ar 13, dod atlikumu G, turklāt $G > A > N$. Kāds varēja būt sākotnējais skaitlis?

Atrisinājums. No tā, ka $GANGA$, dalot ar 7, dod atlikumu A, $GANGA$, dalot ar 11, dod atlikumu N, bet $GANGA$, dalot ar 13, dod atlikumu G, izriet, ka $(\overline{GANGA} - A)$ dalās ar 7, $(\overline{GANGA} - N)$ dalās ar 11 un $(\overline{GANGA} - G)$ dalās ar 13.

Pārveidojam doto skaitli

$$\overline{GANGA} = \overline{GA} \cdot 1000 + N \cdot 100 + \overline{GA} = 1001 \cdot \overline{GA} + 100N = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot \overline{GA} + 100N.$$

Pirmais saskaitāmais dalās gan ar 13, gan ar 11, gan ar 7.

Lai $(\overline{GANGA} - G)$ dalītos ar 13, $(100N - G)$ ir jādalās ar 13. Ievērojot, ka

$$100N - G = 91N + 9N - G = 13 \cdot 7N + 9N - G,$$

iegūstam, ka $(9N - G)$ jādalās ar 13.

Līdzīgi, ar 7 ir jādalās $(100N - A)$. Pārveidojot

$$100N - A = 98N + 2N - A = 7 \cdot 14N + 2N - A,$$

iegūstam, ka $(2N - A)$ jādalās ar 7.

Visbeidzot ar 11 ir jādalās $100N - N = 99N$, kas vienmēr izpildās.

Tā kā A ir atlikums, kas rodas, skaitli dalot ar 7, tad $A \leq 6$, un tā kā $A > N$, tad lielākā iespējamā N vērtība ir 5. Apskatīsim visus gadījumus.

N	$9N - G$	G, lai $(9N - G) \vdots 13$	$2N - A$	A, lai $(2N - A) \vdots 7$	$\overline{GANGA}$
0	$-G$	0 (neder, jo $N = 0$)			
1	$9 - G$	9	$2 - A$	2 9 (neder, jo $G = 9$)	92192
2	$18 - G$	5	$4 - A$	4	54254
3	$27 - G$	1 (neder, jo $G < N$)			
4	$36 - G$	nav			
5	$45 - G$	6	$10 - A$	3 (neder, jo $A < N$)	

Tātad sākotnējais skaitlis varēja būt 54254 vai 92192.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	0	14	28	10	6	2	1	2	0	0	2	3
Vidēji iegūtais punktu skaits			2,04									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Uzdevums ir rēbuss par ciparu aizstāšanu ar burtiem.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) skaitļa pieraksts $\overline{GANGA} = \overline{GA} \cdot 1000 + N \cdot 100 + \overline{GA}$,
2) dalāmības īpašība – ja summa un viens (no diviem) saskaitāmais dalās ar kādu skaitli, tad arī otrajam saskaitāmajam jādalās ar šo pašu skaitli,
3) gadījumu šķirošana.

9.4. Pierādīt, ka $x^4 - x^2 - 3x + 4 > 0$ visiem reāliem x.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^2)^2 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} > 0;$$

$$(x^2 - 1)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $\frac{3}{4}$ ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	4	15	16	2	8	2	1	0	0	0	0	20
Vidēji iegūtais punktu skaits			4,02									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

uzdevums ir standartuzdevums par nevienādību pierādīšanu, atdalot pilno kvadrātu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana.

9.5. Katra no bumbiņām, kas atrodas kastē, nokrāsota vienā no N krāsām, un uz katras uzrakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz N. Zināms, ka katra no N krāsām izmantota vismaz vienu reizi, tāpat arī katrs skaitlis, kas nepārsniedz N, izmantots vismaz vienu reizi. Kādām N vērtībām kastē noteikti varēs atrast N dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām būs rakstīti N dažādi skaitļi?

Atrisinājums. Ja $N = 1$, tad kastē ir vismaz viena bumbiņa, kas nokrāsota vienīgajā iespējamajā krāsā un uz tās uzrakstīts skaitlis 1. Tātad vērtība $N = 1$ der.

Parādīsim, ja $N = 2$, tad vienmēr var atrast divas bumbiņas, kam izpildās prasītās īpašības. Izvēlamies patvaļīgu bumbiņu. Tās krāsu apzīmējam ar k_1, bet skaitli, kas uz tās uzrakstīts – ar s_1. Ja kastē atrodas bumbiņa, kuras krāsa ir k_2 un uz kuras uzrakstīts skaitlis s_2, tad esam atraduši nepieciešamo bumbiņu pāri. Apskatīsim gadījumu, kad kastē nav bumbiņa, kuras krāsa ir k_2 un uz kuras uzrakstīts skaitlis s_2. Tā kā kastē ir divu dažādu krāsu bumbiņas, tad kastē ir jābūt bumbiņai, kuras krāsa ir k_2 un uz kuras uzrakstīts skaitlis s_1.Tā kā kastē ir bumbiņa, uz kuras uzrakstīts skaitlis s_2, tad kastē ir jābūt bumbiņai, kuras krāsa ir k_1 un uz kuras uzrakstīts skaitlis s_2. Tātad kastē ir divas bumbiņas, kuru krāsas ir k_2 un k_1 un uz tām uzrakstītie skaitļi ir attiecīgi s_1 un s_2, kas veido nepieciešamo bumbiņu pāri.

Pamatosim, ka N nevar būt lielāks kā 2. Tabulā parādīts piemērs, kurā visas uzdevumā minētās īpašības izpildās, bet nevar atrast N dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz N.

Skaitlis / Krāsa	s_1	s_2	s_3	…	s_N
k_1		+	+	…	+
k_2	+				
k_3	+				
…	…				
k_N	+				

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	32	7	4	1	3	1	3	1	5	3	3
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,49								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) uzdevuma atrisināšana mazām nezināmā vērtībām, ja $N = 1$ un $N = 2$,
2) algoritma izstrāde pārējām N vērtībām.

10. klase

10.1. Dots, ka b un c ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2 - bx + c = 0$ reālās saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka **a)** $x_1^2 + x_2^2 + 2017$; **b)** $x_1^3 + x_2^3$ ir naturāls skaitlis!

Atrisinājums. No Vjeta teorēmas izriet, ka $x_1 + x_2 = b$ un $x_1x_2 = c$. Tātad gan sakņu summa, gan sakņu reizinājums ir naturāls skaitlis un abas saknes ir pozitīvas.

a) Pārveidojam doto izteiksmi:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2017 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2017 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2017 =$$
$$= b^2 - 2c + 2017.$$

Tā kā naturāla skaitļa kvadrāts ir naturāls skaitlis un naturālu skaitļu summa vai starpība ir vesels skaitlis, tad $b^2 - 2c + 2017$ ir vesels skaitlis, līdz ar to $x_1^2 + x_2^2 + 2017$ arī ir vesels skaitlis. Ņemot vērā, ka $x_1^2 + x_2^2 + 2017 > 0$, secinām, ka $x_1^2 + x_2^2 + 2017$ ir naturāls skaitlis.

b) Pārveidojam doto izteiksmi:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2^2 - x_1^2x_2 = b(b^2 - 2c) - x_1x_2(x_2 + x_1) =$$
$$= b(b^2 - 2c) - cb = b^3 - 3bc.$$

Tā kā naturāla skaitļa kubs ir naturāls skaitlis un naturālu skaitļu starpība ir vesels skaitlis, tad $b^3 - 3bc$ ir vesels skaitlis. Tā kā $x_1^3 + x_2^3 > 0$, tad $x_1^3 + x_2^3$ ir naturāls skaitlis.

Piezīme. b) gadījumā var izmantot formulu $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	29	13	4	1	4	4	4	3	5	11	14
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,17								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Šāda tipa uzdevums ir standartuzdevums par izteiksmēm, kas satur kvadrātvienādojuma saknes.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) Vjeta teorēma,
3) izteiksmes pārveidošana formā, kur parādās tikai $x_1 + x_2$ vai x_1x_2.

10.2. Dots pirmskaitlis, kas satur vismaz 4 dažādus ciparus. Pierādīt, ka tā ciparus var pārkārtot citā secībā tā, lai jauniegūtais skaitlis nebūtu pirmskaitlis!

Atrisinājums. Ja pirmskaitlis satur kādu no cipariem 0; 2; 4; 5; 6 vai 8, tad, izveidojot skaitli, kur šis cipars ir pēdējais, būsim ieguvuši skaitli, kas dalās ar 2 vai 5, tātad nav pirmskaitlis. Atliek aplūkot gadījumu, ka pirmskaitlis satur tikai ciparus 1; 3; 7 un 9.

Aplūkojam septiņus skaitļus $x \cdot 10^4 + 1379$, $x \cdot 10^4 + 1397$, $x \cdot 10^4 + 1739$, $x \cdot 10^4 + 1793$, $x \cdot 10^4 + 1937$, $x \cdot 10^4 + 1973$, $x \cdot 10^4 + 3719$, kur x ir skaitlis, kura pieraksts veidots no atlikušajiem dotā pirmskaitļa cipariem, kas paliek, ja pa vienai reizei izmanto ciparus 1; 3; 7 un 9 ($x = 0$, ja dotais bija četrciparu skaitlis).

Aplūkojam atlikumus, kas rodas, dalot šos skaitļus ar 7. Skaitli $x \cdot 10^4$ dalot ar 7, atlikumā iegūst y, kur $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Skaitlis	Atlikums, dalot ar 7
$x \cdot 10^4 + 1379$	y
$x \cdot 10^4 + 1397$	$y + 4$
$x \cdot 10^4 + 1739$	$y + 3$
$x \cdot 10^4 + 1793$	$y + 1$
$x \cdot 10^4 + 1937$	$y + 5$
$x \cdot 10^4 + 1973$	$y + 6$
$x \cdot 10^4 + 3719$	$y + 2$

Tā kā ir iegūti 7 dažādi atlikumi, ko iegūst dalot ar 7, tad, neatkarīgi no y vērtības, kāds no skaitļiem dalīsies ar 7, tātad nebūs pirmskaitlis.

Līdz ar to esam pierādījuši vajadzīgo.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	18	2	1	0	60	5	0	0	2	0	2
Vidēji iegūtais punktu skaits			3,39									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

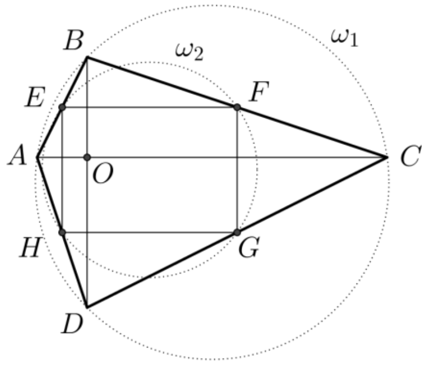
1) gadījumu šķirošana atkarībā no skaitlī esošajiem cipariem,
2) algoritma izstrādāšana.

10.3. Četrstūris $ABCD$ ir ievilkts riņķa līnijā ω_1, bet $ABCD$ malu viduspunkti atrodas uz riņķa līnijas ω_2. Pierādīt, ka $\sphericalangle ABD + \sphericalangle BDC = 90°$.

Atrisinājums. Apzīmēsim malu AB, BC, CD un DA malu viduspunktus attiecīgi ar E, F, G un H (skat. 31. att.). Nogrieznis EF ir trijstūra ABC viduslīnija, tāpēc $EF||AC$ un $EF = \frac{1}{2}AC$. Līdzīgi, HG ir ΔACD viduslīnija, tāpēc $HG||AC$ un $HG = \frac{1}{2}AC$.

No ΔABD un ΔBCD līdzīgi iegūst, ka $EH = FG = \frac{1}{2}BD$ un $EH||F$G.

Tātad četrstūris $EFGH$ ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir vienādas. Tā kā visas četrstūra $EFGH$ virsotnes atrodas uz riņķa līnijas ω_2, tad $EFGH$ ir taisnstūris, no kurienes izriet, ka $BD \perp AC$. Tātad ΔDOC (punkts O ir AC un BD krustpunkts) ir taisnleņķa un $\sphericalangle ODC + \sphericalangle OCD = 90°$ jeb $\sphericalangle BDC + \sphericalangle ACD = 90°$. Tā kā $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka AD, tad $\sphericalangle BDC + \sphericalangle ABD = 90°$.



31. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	35	32	18	0	2	0	0	0	0	0	5
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,37								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūra viduslīnijas definīcija un īpašība,
2) paralelograma pazīme – ja četrstūra pretējās malas pa pāriem ir vienādas, tad tas ir paralelograms,
3) ievilkta četrstūra īpašība – ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$,
4) ievilkto leņķu īpašība – ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi.

10.4. Dotas 40 kartītes, uz divām no tām uzrakstīts skaitlis 1, uz divām – skaitlis 2, ..., uz divām – skaitlis 20. Kāds ir lielākais iespējamais komplektu skaits, ko vienlaicīgi var izveidot no šīm 40 kartītēm tā, lai katrā komplektā būtu trīs kartītes, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 21?

Atrisinājums. Lielākais komplektu skaits ir astoņi, piemēram, (6, 7, 8); (5, 7, 9); (4, 5, 12); (3, 4, 14); (3, 6, 12); (2, 8, 11); (2, 9, 10); (1, 1, 19).

Pierādīsim, ka vairāk kā astoņus komplektus izveidot nevar. Ja varētu izveidot deviņus komplektus, tad būtu izmantotas 27 kartītes un uz tām uzrakstīto skaitļu summa būtu $9 \cdot 21 = 189$, bet pati mazākā skaitļu summa, ko var iegūt no 27 kartītēm, ir

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot 13 + 14 = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 13) + 14 = 2 \cdot \frac{(1 + 13) \cdot 13}{2} + 14 = 196,$$

kas jau ir lielāka nekā 189. Tātad deviņus komplektus izveidot nevar.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	26	7	17	0	23	13	0	0	2	0	3
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,68								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) pamatojums, ka atrastais komplektu skaits ir lielākais iespējamais.

10.5. Seši tūristi bija devušies vairākos ceļojumos uz sešām valstīm, katrā ceļojumā viens tūrists apceļoja tieši vienu valsti. Ja izvēlamies jebkuras trīs valstis un jebkurus trīs tūristus, tad vismaz viens no viņiem ir bijis ceļojumā uz kādu no šīm valstīm. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais ceļojumu skaits?

Atrisinājums. Mazākais iespējamais kopējais ceļojumu skaits ir 10. Rakstīsim ceļojumus 6×6 tabulā, rindiņas atbildīs tūristiem, kolonnas – valstīm, ja tūrists ir bijis ceļojumā uz kādu valsti, tad šajā rūtiņā liksim krustiņu. Pamatosim, ka der tabulā parādītais piemērs. Viegli redzēt, ka jebkuri 3 tūristi ir kopumā apmeklējuši vismaz 4 valstis, tātad, izvēloties jebkuras 3 valstis, vismaz vienu no tām kāds no šiem tūristiem būs apmeklējis.

Valsts / Tūrists	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.					X	X
2.				X		X
3.			X		X	
4.			X	X		
5.		X				
6.	X					

Pierādīsim, ka ar deviņiem ceļojumiem nepietiek. Aplūkosim 3 tūristus, kuri ir devušies vismazāk ceļojumos. Vispirms pamatosim, ka tie kopā ir devušies ne vairāk kā 3 ceļojumos. Ja tie būtu devušies četros ceļojumos, tad vismaz kāds no tiem būtu devies divos ceļojumos, tātad arī atlikušie 3 tūristi katrs būtu devušies vismaz divos ceļojumos (jo mēs aplūkojam tūristus, kas ir ceļojuši vismazāk). Tātad kopējais ceļojumu skaits ir vismaz $4 + 2 \cdot 3 = 10$ un iegūta pretruna. Līdz ar to ir 3 tūristi, kas kopā ir devušies ne vairāk kā 3 ceļojumos, tātad tie kopā apmeklējuši ne vairāk kā 3 valstis. Tāpēc ir vismaz 3 valstis, ko neviens no šiem trim tūristiem nav apmeklējis, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	62	6	2	0	0	0	3	1	2	3	9
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,91									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) pamatojums, ka atrastais ceļojumu skaits ir mazākais iespējamais.

11. klase

11.1. Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kam katrs nākamais cipars ir lielāks par iepriekšējo?

Atrisinājums. Katru šādu piecciparu skaitli var iegūt izsvītrojot 4 ciparus no skaitļa 123456789. Tā kā četrus ciparus var izvēlēties $C_9^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ veidos, tad ir tieši 126 šādi piecciparu skaitļi.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	5	16	5	2	0	1	0	2	2	4	26
Vidēji iegūtais punktu skaits			5,76									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par skaitļu veidošanas principu un sasaistīšana ar kombinācijām,
2) kombināciju skaita aprēķināšana.

11.2. Kurš no skaitļiem $(\sqrt{7})^{\sqrt{5}}$ un $(\sqrt{5})^{\sqrt{7}}$ ir lielāks?

Atrisinājums. Lielāks ir skaitlis $(\sqrt{7})^{\sqrt{5}}$. Kāpināsim abus skaitļus pakāpē $2\sqrt{5}$ un pierādīsim, ka $(\sqrt{5})^{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{5}} < (\sqrt{7})^{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}$. Tas savukārt izriet no tā, ka $(\sqrt{7})^{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = 7^5 = 16087$, bet $(\sqrt{5})^{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{5}} = 5^{\sqrt{35}} < 5^6 = 15625$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	4	37	11	3	2	0	0	0	0	2	1	5
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,61								

Skaidrojums par uzdevumu

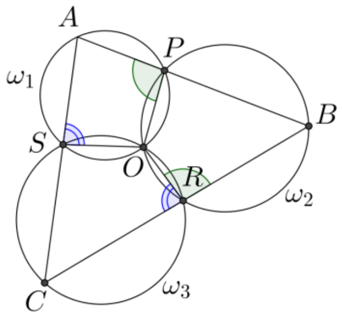
Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) skaitļu kāpināšana,
2) skaitļu novērtēšana.

11.3. Trīs riņķa līnijas ω_1, ω_2 un ω_3 krustojas punktā O. Riņķa līnijas pa pāriem krustojas arī punktos P (ω_1 un ω_2), R (ω_2 un ω_3) un S (ω_1 un ω_3). Uz ω_1 loka PS, kas nesatur O, izvēlēts punkts A, taisne AP vēlreiz krusto ω_2 punktā B, un taisne AS vēlreiz krusto ω_3 punktā C. Pierādīt, ka punkti B, R un C atrodas uz vienas taisnes!

Atrisinājums. Savienojam punktu R ar B un C (skat. 32. att.), pietiek pierādīt, ka $\sphericalangle BRC = 180°$. Tā kā ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$ un blakusleņķu summa ir $180°$, tad $\sphericalangle BRO = 180° - \sphericalangle BPO = \sphericalangle APO$. Līdzīgi iegūst $\sphericalangle CRO = 180° - \sphericalangle CSO = \sphericalangle ASO$. Tātad $\sphericalangle BRC = \sphericalangle BRO + \sphericalangle CRO = \sphericalangle APO + \sphericalangle ASO = 180°$ kā ievilktā četrstūra pretējo leņķu summa.



32. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	20	17	1	1	0	0	0	0	2	1	17
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,68								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) lai punkti R, B un C atrastos uz vienas taisnes, pietiek pierādīt, ka $\sphericalangle BRC = 180°$,
2) blakusleņķu īpašība,
3) ievilkta četrstūra īpašība – ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$.

11.4. Pierādīt, ka no jebkuriem 17 naturāliem skaitļiem var izvēlēties 9 skaitļus tā, lai to summa dalītos ar 9.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka no jebkuriem pieciem naturāliem skaitļiem var izvēlēties trīs skaitļus tā, ka to summa dalās ar 3. Skaitli, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0; 1 vai 2.

- Ja starp pieciem dotajiem skaitļiem ir trīs skaitļi, kas dod vienādu atlikumu, dalot ar 3, tad to summa dalās ar 3, jo $0+0+0 \equiv 0\ (mod\ 3); 1+1+1 \equiv 0\ (mod\ 3); 2+2+2 \equiv 0\ (mod\ 3)$.
- Ja nav trīs skaitļu, kas dod vienādu atlikumu, dalot ar 3, tad ir vismaz viens skaitlis no katra atlikuma veida. Šo trīs skaitļu summa dalās ar 3, jo $0+1+2 \equiv 0\ (mod\ 3)$.

Izmantojot iepriekš pierādīto, no sākotnējiem 17 skaitļiem varam izveidot piecas grupas pa trīs skaitļiem tā, lai tajās esošo skaitļu summa dalās ar 3. Apzīmējam

$$\{a_1, a_2, a_3\}; \{b_1, b_2, b_3\}; \{c_1, c_2, c_3\}; \{d_1, d_2, d_3\}; \{e_1, e_2, e_3\}.$$

Skaitļus, kurus iegūst katras grupas skaitļu summu dalot ar 3, apzīmējam attiecīgi ar A, B, C, D un E. No iepriekš pierādītā izriet, ka no šiem pieciem iegūtajiem skaitļiem var izvēlēties trīs tā, ka to summa dalās ar 3. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $A+B+C$ dalās ar 3 jeb

$$A+B+C=3n,$$

kur n – naturāls skaitlis. Tā kā $A=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}; B=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}; C=\frac{c_1+c_2+c_3}{3}$, tad iegūstam

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}+\frac{c_1+c_2+c_3}{3}=3n.$$

Reizinot abas vienādības puses ar 3, iegūstam

$$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+c_3=9n.$$

Tātad esam ieguvuši, ka $a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+c_3$ dalās ar 9 un prasītais ir pierādīts.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	14	33	15	2	1	0	0	0	0	0	0	0
Vidēji iegūtais punktu skaits				0,43								

Skaidrojums par uzdevumu

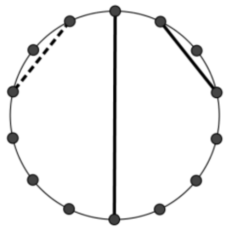
Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) dalīšana ar atlikumu,
2) darbības ar atlikumiem (kongruences),
3) vispārīga algoritma izveidošana.

11.5. Uz riņķa līnijas atzīmēti N punkti tā, ka šie punkti ir regulāra N-stūra virsotnes. Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli: Viņi pārmaiņus novelk pa vienai hordai, kas savieno divus atzīmētos punktus uz riņķa līnijas tā, lai novilktā horda nekrustotos ar agrāk novilktajām hordām. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena no novilktajām hordām izveidojas trijstūris. Kurš spēlētājs noteikti var uzvarēt, ja A izdara pirmo gājienu un **a)** $N=14$; **b)** $N=15$?

Atrisinājums. a) Ja $N=14$, tad noteikti var uzvarēt spēlētājs A. Pirmajā gājienā spēlētājam A jānovelk diametrs. Pēc katra spēlētāja B gājiena spēlētājs A pārbauda, vai ir iespējams novilkt hordu tā, lai veidotos trijstūris. Ja tādu hordu var novilkt, tad spēlētājs A to novelk un līdz ar to uzvar. Ja tādu hordu nav iespējams novilkt, tad spēlētājs A velk hordu, kas ir simetriska spēlētāja B tikko novilktajai hordai attiecībā pret pirmajā gājienā novilkto diametru (piemēram, skat. 33. att.). Kamēr spēlētājs B var novilkt hordu, arī spēlētājs A simetriski attiecībā pret novilkto diametru var novilkt hordu. Tā kā iespējas novilkt hordu ar katru gājienu samazinās, tad pienāks brīdis, kad B novilks hordu tā, ka spēlētājs A savā nākamajā gājienā varēs izveidot trijstūri un būs uzvarējis.

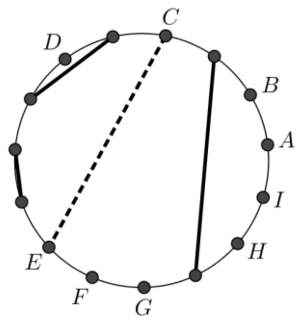


33. att.

b) Ja $N = 15$, tad noteikti var uzvarēt spēlētājs B. Tā kā pēdējā gājienā tiek novilkta trijstūra trešā mala (to izdara uzvarētājs) un pirmspēdējā gājienā tiek novilkta trijstūra otrā mala (to izdara zaudētājs), tad, lai uzvarētu, spēlētāji visā spēles gaitā izvairās vilkt tās hordas, kurām kāda virsotne sakrīt ar jau novilktu hordu. Tāpēc varam analizēt šādu spēli: spēlētāji velk hordas tā, lai tās nekrustotos un lai neizmantotu ar novilktajām hordām kopīgus galapunktus, tādā gadījumā uzvarētājs ir tas, kurš novelk pēdējo šādu hordu.

Neizmantotos punktus jau novilktās hordas sadala vairākās grupās – vienā grupā nonāk tie punkti, kurus joprojām var savienot ar hordu. Katrā gājienā spēlētājs var izvēlēties vienu no esošajām grupām un tajās esošos punktus ar hordu sadalīt divās grupās. Tās grupas, kurās ir 0 vai 1 punkts, atmetam, jo tās neiespaido turpmāko spēles gaitu.

Piemēram, pirms tiek novilkta horda CE (skat. 34. att.), brīvie punkti sadalās grupās: $\{A, B, H, I\}$; $\{C, E, F, G\}$ (tā kā punkts D ir viens pats, tad to vienojāmies atmest). Šo pozīciju, kad ir divas grupas katrā pa 4 neizmantotiem punktiem, apzīmēsim $(4, 4)$. Tad, kad tiek novilkta horda CE, iegūstam grupas: $\{A, B, H, I\}$ un $\{F, G\}$. Tātad tiek izdarīts gājiens no pozīcijas $(4, 4)$ uz pozīciju $(4, 2)$, apzīmēsim $(4, 4) \to (4, 2)$.



34. att.

Lai pierādītu, ka spēlētājs B noteikti var uzvarēt, aplūkosim visus iespējamos spēlētāja A gājienus no sākuma pozīcijas (15) un katram no šiem gājieniem atradīsim atbilstošu spēlētāja B gājienu, kas viņam nodrošinās uzvaru. Starp 15 punktiem spēlētājs A var novilkt hordu septiņos dažādos veidos, katrā no šiem gadījumiem spēlētājs B var turpināt šādi:

$$15 \to \begin{cases} (13) \to (\mathbf{8}, \mathbf{3}) \\ (12) \to (\mathbf{5}, \mathbf{5}) \\ (11, 2) \to (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \\ (10, 3) \to (\mathbf{8}, \mathbf{3}) \\ (9, 4) \to (\mathbf{9}) \\ (8, 5) \to (\mathbf{5}, \mathbf{5}) \\ (7, 6) \to (\mathbf{7}, \mathbf{3}) \end{cases}$$

Pamatosim, ka treknrakstā izceltās pozīcijas ir "uzvarošās", tas ir, ja šādā pozīcijā spēlētājs nonāk, tad viņš sev var nodrošināt uzvaru.

Ievērosim, ja pēc spēlētāja B gājiena ir pozīcija $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m})$, tad spēlētājs B var uzvarēt, turpmāk izdarot pretinieka gājieniem simetriskus gājienus otrā punktu grupā.

Spēlētājs A no pozīcijas $(\mathbf{8}, \mathbf{3})$ un no pozīcijas $(\mathbf{8}, \mathbf{2})$ hordu var novilkt piecos dažādos veidos, katrā no šiem gadījumiem spēlētājs B var turpināt šādi:

$$(\mathbf{8}, \mathbf{3}) \to \begin{cases} (8) \to (\mathbf{3}, \mathbf{3}) \\ (6, 3) \to (\mathbf{3}, \mathbf{3}) \\ (5, 3) \to (\mathbf{3}, \mathbf{3}) \\ (4, 2, 3) \to (\mathbf{2}, \mathbf{3}) \\ (3, 3, 3) \to (\mathbf{3}, \mathbf{3}) \end{cases}$$

$$(\mathbf{8}, \mathbf{2}) \to \begin{cases} (8) \to (\mathbf{3}, \mathbf{3}) \\ (6, 2) \to (\mathbf{2}, \mathbf{3}) \\ (5, 2) \to (\mathbf{2}, \mathbf{3}) \\ (4, 2, 2) \to (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \\ (3, 3, 2) \to (\mathbf{3}, \mathbf{3}) \end{cases}$$

Pozīcija $(\mathbf{2},\mathbf{3})$ ir uzvarošā spēlētājam B, jo no tās var izdarīt tieši divus gājienus.

Spēlētājs A no pozīcijas $(\mathbf{9})$ un no pozīcijas $(\mathbf{7},\mathbf{3})$ hordu var novilkt četros dažādos veidos, katrā no šiem gadījumiem spēlētājs B var turpināt šādi:

$$(\mathbf{9}) \to \begin{cases} (7) \to (\mathbf{2},\mathbf{3}) \\ (6) \to (\mathbf{2},\mathbf{2}) \\ (5,2) \to (\mathbf{2},\mathbf{2}) \\ (4,3) \to (\mathbf{2},\mathbf{3}) \end{cases}$$

$$(\mathbf{7},\mathbf{3}) \to \begin{cases} (7) \to (\mathbf{2},\mathbf{3}) \\ (6) \to (\mathbf{2},\mathbf{2}) \\ (5,2) \to (\mathbf{2},\mathbf{2}) \\ (4,3) \to (\mathbf{2},\mathbf{3}) \end{cases}$$

Līdz ar to esam ieguvuši uzvarošu stratēģiju spēlētājam B: katrā savā gājienā viņš novelk hordu tā, lai nonāktu "uzvarošajā" pozīcijā, kas izcelta treknrakstā. Visos gadījumos spēlētājs B nonāks pozīcijā $(\mathbf{2},\mathbf{3})$ vai $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})$ un vēl pēc pāra skaita gājieniem būs tas, kurš novelk pēdējo hordu, kurai ar jau novilktajām hordām nav kopīgu galapunktu.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	31	4	1	0	0	23	3	0	0	0	0
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,24								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Uzdevums ir matemātiska spēle, kuras risināšanā galvenā ideja ir simetrijas izmantošana.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) gadījumu šķirošana,
2) simetrija pret taisni,
3) uzvarošās stratēģijas izstrādāšana.

12. klase

12.1. Doti tādi skaitļi a, b un c, ka $a+c=\frac{b}{3}$, turklāt neviens no skaitļiem a,b,c nav 0. Pierādīt, ka funkcijas $f(x)=ax^2+bx+c$ grafiks noteikti krusto x asi kādā intervāla $[-1;1]$ punktā!

Atrisinājums. Ievērojam, ka funkcijas vērtībām $f(-1)$ un $f(1)$ ir dažādas zīmes:

$f(-1)=a-b+c=\frac{b}{3}-b=-\frac{2b}{3}$;

$f(1)=a+b+c=\frac{b}{3}+b=\frac{4b}{3}$.

Tādā gadījumā skaidrs, ka šajā intervālā $[-1;\ 1]$ funkcijas grafikam ir jākrusto x ass.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	27	4	1	2	0	0	2	3	0	0	12
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,24								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir standartuzdevums par funkciju.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) funkcijas nepārtrauktības izmantošana – ja $f(a)\cdot f(b)<0$ un funkcija $f(x)$ ir definēta visiem $x\in(a;b)$, tad eksistē vismaz viena tāda vērtība $c\in(a;b)$, ka $f(c)=0$ (tas ir, funkcijas grafiks starp šīm argumenta vērtībām krusto x asi),
2) funkcijas vērtību aprēķināšana un novērtēšana.

12.2. Pierādīt, ka $\sqrt{x^2+y^2}+(2-\sqrt{2})\sqrt{xy} \geq x+y$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi!

Atrisinājums. Tā kā abas nevienādības puses ir pozitīvas, tad, kāpinot kvadrātā, iegūstam

$$x^2+y^2+2\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot(2-\sqrt{2})\sqrt{xy}+(4-4\sqrt{2}+2)xy \geq x^2+2xy+y^2;$$
$$2\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot(2-\sqrt{2})\sqrt{xy} \geq 4(\sqrt{2}-1)xy.$$

Izdalot abas nevienādības puses ar $2\sqrt{xy}>0$ un pēc tam kāpinot abas nevienādības puses kvadrātā (abas puses ir pozitīvas), pakāpeniski iegūstam

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot(2-\sqrt{2}) \geq 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{xy};$$
$$(x^2+y^2)\cdot(6-4\sqrt{2}) \geq 4(3-2\sqrt{2})xy$$

Izdalot abas nevienādības puses ar $(6-4\sqrt{2})>0$, iegūstam $x^2+y^2 \geq 2xy$ jeb $(x-y)^2 \geq 0$.

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	8	15	6	5	0	1	1	0	0	0	18
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,31								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums par nevienādību pierādīšanu, atdalot pilno kvadrātu.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

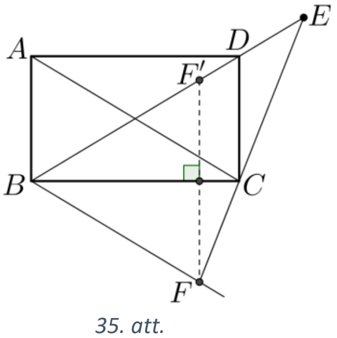
1) nevienādības abu pušu kāpināšana kvadrātā, ņemot vērā, ka abas puses ir pozitīvas,
2) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,
3) saskaitāmo novērtēšana.

12.3. Dots taisnstūris $ABCD$. Uz taisnes BD atlikts punkts E, tā ka D atrodas starp B un E. Uz taisnes EC atlikts punkts F tā, ka BF ir paralēls AC. Pierādīt, ka trijstūra BEF laukums ir lielāks nekā taisnstūra $ABCD$ laukums!

1. atrisinājums. No punkta F velkam perpendikulu pret taisni BC, šī perpendikula krustpunktu ar BD apzīmējam ar F' (skat. 35. att.). Ievērojam, ka $\sphericalangle CAD=\sphericalangle FBC$ kā leņķi, kuru malas atrodas uz paralēlām taisnēm, un $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CBF'$ (taisnstūra īpašība), tātad $\sphericalangle FBC=CBF'$ un trijstūris FBF' ir vienādsānu, no kā izriet, ka punkti F un F' ir simetriski attiecībā pret taisni BC.

Simetrijas dēļ $S(BFC)=S(BF'C)$ un $S(ABCD)=2\cdot S(BFC)+2\cdot S(CDF')$, līdz ar to pietiek pierādīt, ka $S(CDE)>S(CDF')$.

Apzīmējam $\sphericalangle F'CD=\alpha$, tad simetrijas dēļ $\sphericalangle FCB=\sphericalangle BCF'=90°-\alpha$ un $\sphericalangle ECD=180°-\sphericalangle FCB-\sphericalangle BCF'-\sphericalangle F'CD=180°-2\cdot(90°-\alpha)-\alpha=\alpha$. Līdz ar to $S(CDE)=\frac{1}{2}CE\cdot CD\cdot\sin\alpha$ un $S(CDF')=\frac{1}{2}CF'\cdot CD\cdot\sin\alpha$, tātad atliek pamatot, ka $CE>CF'$ jeb $CE>CF$. Tā kā $BE>BF'=BF$ un nogrieznis BC ir trijstūra EBF bisektrise, tad no bisektrises īpašības izriet, ka $CE>CF$.



35. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam $AB=CD=a$, $DE=p$, $OA=OB=OC=OD=y$ (kur punkts O ir diagonāļu krustpunkts), $BF=x$ un $\sphericalangle DBC=\sphericalangle DAC=\sphericalangle CBF=\alpha$ (skat. 36. att.). Trijstūra BEC augstums pret BC ir h_1, bet trijstūra BFC augstums pret BC ir h_2.

Tad $S(ABCD) = BC \cdot a$ un $S(BEF) = S(BEC) + S(BCF) = \frac{1}{2}BC \cdot h_1 + \frac{1}{2}BC \cdot h_2 = BC \cdot \frac{h_1+h_2}{2}$.

Tātad nepieciešams pierādīt, ka $h_1 + h_2 > 2a$.

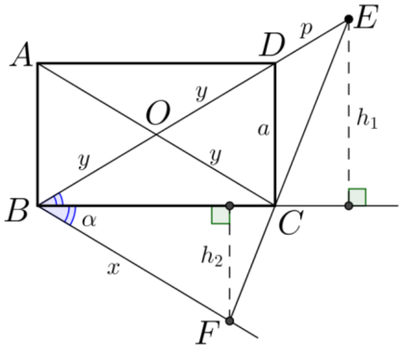
Tā kā $\Delta OEC \sim \Delta BEF$, jo leņķi BEF krusto divas paralēlas taisnes OC un BF, tad $\frac{OE}{BE} = \frac{OC}{BF}$ jeb $\frac{p+y}{p+2y} = \frac{y}{x}$. Izsakām $x = y \cdot \frac{p+2y}{p+y}$.

No ΔBCD iegūstam, ka $\sin\alpha = \frac{CD}{BD} = \frac{a}{2y}$.

Apskatām summu $h_1 + h_2$:

$$h_1 + h_2 = (2y+p)\sin\alpha + x\sin\alpha = (2y+p+x)\sin\alpha = \left(2y + p + y\frac{p+2y}{p+y}\right)\frac{a}{2y} = a\frac{p^2+4py+4y^2}{2py+2y^2}.$$

Tā kā $p > 0$, tad $p^2 > 0$ un $a\frac{p^2+4py+4y^2}{2py+2y^2} > a\frac{p^2+4py+4y^2}{\frac{p^2}{2}+2py+2y^2} = 2a$, kas arī bija jāpierāda.



36. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	5	6	8	0	1	2	1	2	8	4	13
Vidēji iegūtais punktu skaits			5,72									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) simetrijas izmantošana,
2) figūru laukumu novērtēšana un salīdzināšana.

12.4. Naturālu skaitli sauksim par *skaistu*, ja tā visu naturālo dalītāju summa (ieskaitot 1 un pašu skaitli) ir nepāra skaitlis. Atrast mazāko naturālo skaiti k ar īpašību: starp jebkuriem patvaļīgi izvēlētiem k *skaistiem* skaitļiem var izvēlēties divus dažādus skaitļus tā, lai to reizinājums būtu naturāla skaitļa kvadrāts!

Atrisinājums. Mazākā k vērtība ir 3.

Ievērojam, ka $k = 2$ neder, jo, piemēram, izvēloties *skaistus* skaitļus 2 un 9 (dalītāju summa ir attiecīgi $1 + 2 = 3$ un $1 + 3 + 9 = 13$), to reizinājums $2 \cdot 9 = 18$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

Pierādīsim, ka ar $k = 3$ pietiek. Jebkuru naturālu skaitli n var izteikt formā $n = 2^u \cdot v$, kur v ir nepāra skaitlis. Skaidrs, ja n ir *skaists*, tad arī v ir *skaists*, jo visi n nepāra dalītāji ir visi v dalītāji, bet pāra dalītāji nemaina dalītāju summas paritāti. Visi v dalītāji ir nepāra skaitļi, sadalām tos pāros tā, ka vienā pārī ietilpst v dalītāji, kuru reizinājums ir v. Iespējami divi gadījumi.

- Ja v nav naturāla skaitļa kvadrāts, tad visus dalītājus šādi var sadalīt pāros, tātad to summa ir pāra skaitlis, tātad v šādā gadījumā nav skaists.
- Ja v ir naturāla skaitļa kvadrāts, tas ir, $v = k^2$, tad visi dalītāji, izņemot k, sadalās pāros. Tātad šādā gadījumā dalītāju skaits ir nepāra skaitlis un to summa arī ir nepāra, tātad v ir skaists.

No tā secinām, ka n ir *skaists*, ja v ir kvadrāts.

Ja doti trīs *skaisti* skaitļi $n_1 = 2^{u_1} \cdot v_1$, $n_2 = 2^{u_2} \cdot v_2$ un $n_3 = 2^{u_3} \cdot v_3$, tad divi no skaitļiem u_1, u_2, u_3 būs ar vienādu paritāti, ja reizina attiecīgos skaistos skaitļus (pieņemsim, ka tie ir n_1 un n_2), tad redzams, ka reizinājums $n_1 \cdot n_2 = 2^{u_1+u_2}v_1v_2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	16	14	6	3	4	1	3	0	0	3	1	5
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,15								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pretpiemēra atrašana vērtībai $k = 2$,
2) gadījumu šķirošana,
3) pamatojums, ka, sākot ar $k = 3$, uzdevumā prasītais izpildās.

12.5. Kādā valstī no parlamenta deputātiem ir izveidotas 100 komisijas. Katram deputātam ir pienākums strādāt vismaz vienā komisijā, taču deputāti drīkst strādāt arī vairākās komisijās. Deputāti par darbu komisijās katru mēnesi saņem atalgojumu pēc šāda principa:

- par darbu pirmajā komisijā netiek maksāts atalgojums;
- par darbu katrā nākamajā komisijā tiek maksāts par 10 eiro vairāk nekā par darbu iepriekšējā komisijā (tas ir, par darbu otrajā komisijā tiek maksāti 10 eiro, par darbu trešajā komisijā tiek maksāti 20 eiro utt.).

Zināms, ka jebkurām divām dažādām komisijām ir tieši viens kopīgs deputāts, kas darbojas tajās abās. Cik liels ir visu deputātu kopējais mēneša atalgojums par darbu komisijās?

Atrisinājums. Sanumurējam deputātus ar numuriem 1, 2, 3, …, n. Ar $k(d)$ apzīmējam visu komisiju skaitu, kurās strādā deputāts d. No dotā izriet, ka deputāts d par darbu komisijās mēnesī saņem $10 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + k(d) - 1) = 10 \cdot \frac{k(d)(k(d)-1)}{2} = 10 \cdot C_{k(d)}^2$ eiro. Līdz ar to visi deputāti kopā par darbu komisijās mēnesī saņem 10$\cdot \left(C_{k(1)}^2 + C_{k(2)}^2 + \cdots + C_{k(n)}^2\right)$ eiro.

Saskaitīsim, cik ir tādu komisiju pāru $\{A; B\}$, ka A un B ir dažādas komisijas:

- Tā kā pavisam ir 100 komisijas, tad dažādo komisiju pāru skaits ir $C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$.
- Katram šādam pārim atbilst tieši viens deputāts d, kas strādā gan A, gan B, tātad visus komisiju pārus var sadalīt n grupās tā, ka katram komisiju pārim $\{A; B\}$ no d-tās grupas, $d = 1, 2, \ldots, n$, ir kopīgs deputāts. Tādā gadījumā d-tajā grupā ir tieši $C_{k(d)}^2$ komisiju pāri (jo no deputāta d apmeklētajām komisijām var izveidot $C_{k(d)}^2$ komisiju pārus). Tā kā katrs komisiju pāris $\{A; B\}$ pieder tieši vienai no šīm n grupām, tad no summas likuma izriet, ka pāru $\{A; B\}$ skaits ir $C_{k(1)}^2 + C_{k(2)}^2 + \cdots + C_{k(n)}^2$.

Vienu un to pašu lielumu esam saskaitījuši divos dažādos veidos, tātad abos gadījumos iegūtie skaitļi ir vienādi: $C_{k(1)}^2 + C_{k(2)}^2 + \cdots + C_{k(n)}^2 = 4950$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka visi parlamenta deputāti kopā par darbu komisijās mēnesī saņem

$10 \cdot \left(C_{k(1)}^2 + C_{k(2)}^2 + \cdots + C_{k(n)}^2\right) = 49500$ eiro.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	8	25	0	5	1	3	2	3	2	1	1	5
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,79								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

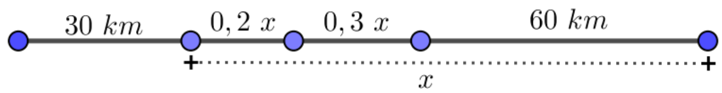
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) objektu skaita iegūšana divos dažādos veidos,
2) kombināciju skaita aprēķināšanas formula.

9. klase

9.1. Jaunieši devās četru dienu pārgājienā gar jūru. Pirmajā dienā tie nogāja 30 km. Otrajā dienā tie ar jahtu nobrauca 20% no atlikušā ceļa. Trešajā dienā jaunieši atkal gāja kājām, noejot 1,5 reizes lielāku attālumu nekā viņi brauca ar jahtu. Ceturtajā dienā atlikušo ceļu 1,5 stundās jaunieši veica ar kvadricikliem, kuru ātrums ir 40 km/h. Cik kilometru garš bija maršruts?

Atrisinājums. Atlikušo maršruta garumu, kas palicis, kad noieti pirmie 30 km, apzīmējam ar x (skat. 37. att.). Tad ar jahtu pa jūru jaunieši brauca $0{,}2x$ km, bet pēc tam ar kājām gāja vēl $1{,}5 \cdot 0{,}2x = 0{,}3x$ km. Ar kvadricikliem tie veica $1{,}5 \cdot 40 = 60$ km. Iegūstam vienādojumu $0{,}2x + 0{,}3x + 60 = x$ jeb $x = 120$. Tātad kopējais maršruta garums bija $x + 30 = 120 + 30 =$ $= 150$ kilometri.



37. att.

Vērtēšanas kritēriji

Nezināmā lielumu izvēle un apzīmēšana	1
Ar jahtu veiktā ceļa izteikšana	2
Trešajā dienā veiktā ceļa izteikšana	2
Ar kvadricikliem veiktā ceļa aprēķināšana	2
Uzrakstīts un atrisināts vienādojums	2
Uzrakstīta atbilde	1
Uzrakstīta tikai atbilde un veikta pārbaude	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	10	6	55	61	28	11	14	25	34	33	405
Vidēji iegūtais punktu skaits				7,84								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir klasisks teksta uzdevums, ko risina skolas kursā.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) mainīgo ieviešana un vienādojuma sastādīšana,
2) lineāra vienādojuma atrisināšana.

9.2. Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 30 vienas klases skolēni, no katra ēdienu veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējās ne vairāk kā vienu ēdienu, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Vai noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu?

Atrisinājums. Pamatosim, ka noteikti ir divi tādi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu. Ievērojam, ka katra veida ēdienu var vai nu neiekļaut komplektā, vai izvēlēties vienu no diviem tā veidiem, tātad katram ēdiena veidam ir 3 dažādas iespējas. Tā kā katrs skolēns izvēlējās vismaz vienu no piedāvātajiem ēdieniem (neder variants, ka no katra ēdiena veida neizvēlas neko), tad ir iespējams izveidot $3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$ dažādus pusdienu komplektus. Ja katru no šiem komplektiem būtu izvēlējies ne vairāk kā viens skolēns, tad pusdienās būtu aizgājuši ne vairāk kā 26 skolēni, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.

Piezīme. Treknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā pusdienās aizgāja 30 skolēni un $30 > 26$, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.

Vērtēšanas kritēriji

Uzrakstīta atbilde, ka noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu	1
Iegūts, ka ir iespējams izveidot 26 dažādus pusdienu komplektus	4
Saprot, ka 30 skolēni jāsadala pa 26 grupām	1
Pamato, ka kādā grupā vienmēr būs vismaz 2 skolēni	4
Uzrakstīti tikai daži piemēri, kur kādā grupā ir 2 skolēni	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	44	91	60	32	60	64	20	9	37	31	232
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,80								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Uzdevums ir standartuzdevums par Dirihlē principu (skat. teoriju pielikumā).

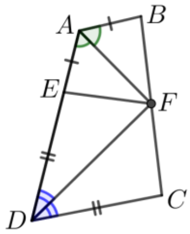
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) objektu skaitīšana,
2) Dirihlē princips,
3) pierādījums no pretējā.

9.3. Četrstūra $ABCD$ malu AB un CD garumu summa ir vienāda ar malas AD garumu. Leņķu DAB un CDA bisektrišu krustpunkts F atrodas uz malas BC. Pierādīt, ka punkts F ir BC viduspunkts!

Atrisinājums. Tā kā $AD = AB + CD$, tad uz malas AD ir tāds punkts E, ka $AB = AE$ un $ED = DC$ (skat. 38. att.). Ievērojam, ka $\Delta BAF = \Delta EAF$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $AB = AE$, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF$ (bisektrises definīcija) un AF – kopīga mala, un $\Delta FED = \Delta FCD$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $\sphericalangle EDF = \sphericalangle CDF$; $ED = DC$ un DF – kopīga.

Vienādos trijstūros atbilstošās malas ir vienādas, tāpēc $BF = EF = CF$. Tātad punkts F atrodas vienādā attālumā no B un C, līdz ar to punkts F ir BC viduspunkts.



38. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Zīmējumā atlikts tāds punkts E, ka $AB = AE$ un $ED = DC$	1
Pamatots, ka $\Delta BAF = \Delta EAF$	3
Pamatots, ka $\Delta FED = \Delta FCD$	3
Pamatots, ka $BF = CF$, un secināts, ka F ir BC viduspunkts	3

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	12	364	138	50	26	17	4	3	1	5	10	53
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,62								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūru vienādības pazīmes,
2) nogriežņa viduspunkta pazīme.

9.4. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y, ka $20x^3 - 17y^2 + 1 = 2018$?

1. atrisinājums. Pierādīsim, ka tādus skaitļus nevar atrast. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$20x^3 - 2000 = 17 + 17y^2;$$
$$20(x^3 - 100) = 17(1 + y^2).$$

Ievērojam, ka vienādojuma kreisā puse ir pāra skaitlis. Lai vienādība būtu patiesa, arī vienādojuma labai pusei jābūt pāra skaitlim, līdz ar to y jābūt nepāra skaitlim. Ņemot $y = 2k + 1$, kur $k \in \mathbb{Z}$, iegūstam

$$20(x^3 - 100) = 17(2 + 4k^2 + 4k).$$

Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar četri, bet labā puse nedalās, tad vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

2. atrisinājums. Pierādīsim, ka tādus skaitļus nevar atrast. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$20x^3 - 2000 = 17 + 17y^2;$$
$$20(x^3 - 100) = 17(1 + y^2).$$

Ievērojam, ka vienādojuma kreisā puse dalās ar 4.

Pamatosim, ka vienādojuma labā puse nedalās ar 4, tas ir, pamatosim, ka $1 + y^2$ nedalās ar 4. Apskatām, kādu atlikumu var dot skaitlis $1 + y^2$, dalot ar 4:

- ja y dalās ar 4, tas ir, $y = 4k$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tad $1 + y^2 = 1 + 16k^2$, kas nedalās ar 4;
- ja y, dalot ar 4, dod atlikumā 1, tas ir, $y = 4k + 1$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tad $1 + y^2 = 1 + 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 2$, kas nedalās ar 4;
- ja y, dalot ar 4, dod atlikumā 2, tas ir, $y = 4k + 2$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tad $1 + y^2 = 1 + 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k) + 5$, kas nedalās ar 4;
- ja y, dalot ar 4, dod atlikumā 3, tas ir, $y = 4k + 3$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tad $1 + y^2 = 1 + 16k^2 + 24k + 9 == 4(4k^2 + 6k) + 10$, kas nedalās ar 4.

Tā kā vienādojuma kreisā puse dalās ar 4, bet labā nedalās, tad esam pierādījuši, ka nevar atrast tādus veselus skaitļus x un y, lai pastāvētu vienādība.

Vērtēšanas kritēriji

Uzrakstīta atbilde, ka nevar atrast tādus skaitļus	1
Ideja, ka abām vienādības pusēm jādalās ar vienu un to pašu skaitli	1
Pamatots, ka abas vienādojuma puses, dalot ar 4, nedod vienu un to pašu atlikumu	8

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	18	222	256	129	29	10	4	1	2	5	1	6
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,19									

Skaidrojums par uzdevumu

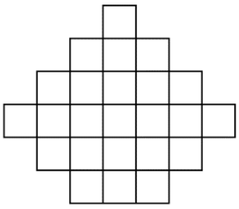
Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Uzdevums par vienādojumiem veselos skaitļos.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

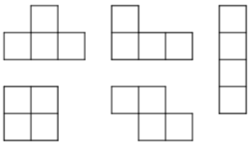
1) sadalīšana reizinātājos,
2) darbības ar atlikumiem,
3) pretrunas modulis – abas vienādojuma puses, dalot ar 4, nedod vienu un to pašu atlikumu.

9.5. Dota figūra, kuras laukums ir 24 rūtiņas (skat. 39. att.). Griežot pa rūtiņu līnijām, tā sagriezta sešās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 4 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!

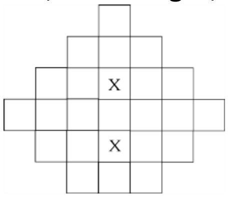


39. att.

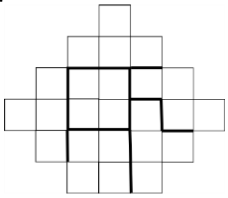
Atrisinājums. Dotās figūras perimetrs ir 26 vienības. Iegūto sešu daļu perimetrus apzīmējam ar $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ un aplūkojam summu $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$. Šajā summā katrs griezuma posms ir ieskaitīts divas reizes, bet katras daļas ārmalas posms – vienu reizi. Tad griezuma līniju kopgarumu var izteikt kā $\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 - 26)$. Tātad nepieciešams minimizēt iegūto sešu daļu perimetru summu. Pavisam ir piecas dažādas figūras, kas sastāv no četrām rūtiņām (skat. 40. att.). Visām figūrām, izņemot 2×2 kvadrātu, perimetrs ir 10 vienības, bet kvadrāta perimetrs ir 8 vienības. Pamatosim, ka no dotās figūras var izgriezt ne vairāk kā divus 2×2 kvadrātus. Kvadrāts 2×2 var atrasties tikai tajās vietās, kur kādā no kvadrāta rūtiņām atrodas "X" (skat. 41. att.). Ja kvadrātu novieto citās vietās, tad tas atšķeļ vienu atsevišķu rūtiņu. Tātad no dotās figūras var izgriezt ne vairāk kā divus 2×2 kvadrātus. Līdz ar to mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums ir $(2 \cdot 8 + 4 \cdot 10 - 26) : 2 = 15$, to var iegūt, piemēram, kā parādīts 42. att.



40. att.



41. att.



42. att.

Vērtēšanas kritēriji

Parādīts piemērs, kur griezuma līniju kopgarums ir 15 vienības	4
Pamatots, ka griezuma līniju kopgarums būs minimālais, ja daļu perimetru summa būs vismazākā	2
Uzrakstīts (var būt bez pamatojuma), ka vienas daļas mazākais iespējamais perimetrs ir 8 vienības	1
Uzrakstīts (var būt bez pamatojuma), ka visām daļām, kas nav kvadrāts, perimetrs ir 10 vienības	1
Pamatots, ka var izgriezt ne vairāk kā divus kvadrātus 2×2	2
Parādīts piemērs, kur griezuma līniju kopgarums ir vairāk nekā 15 vienības	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	80	22	139	9	290	37	55	14	18	6	8
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,51								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatoriskā ģeometrija.

Šis ir uzdevums par figūrām rūtiņu plaknē, kura risināšanā noder zināšanas par tetramino (polimino, kas sastāv no 4 rūtiņām), bet svarīgākais uzdevumā ir izpratne par lauztas līnijas garuma aprēķināšanu.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) lauztas līnijas garuma aprēķināšana,
3) visu figūru (tetramino), kas sastāv no 4 rūtiņām, perimetru aprēķināšana.

10.1. Uz gara baļķa 600 cm attālumā viens no otra atrodas gliemezis un skudra. Ja tie pārvietotos viens otram pretī, tad tie sastaptos pēc 5 minūtēm. Ja tie kustētos vienā virzienā ar tiem pašiem ātrumiem, tad skudra panāktu gliemezi pēc 20 minūtēm. Noteikt, cik centimetrus minūtē veic skudra un cik – gliemezis!

Atrisinājums. Skudras ātrumu apzīmējam ar x un gliemeža – ar y. Tad iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 5x + 5y = 600 \\ 20x = 20y + 600 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} x + y = 120 \\ x - y = 30 \end{cases}$$

Saskaitot pēdējās sistēmas vienādojumus, iegūstam $2x = 150$ jeb $x = 75$ cm/min un $y = 45$ cm/min.

Vērtēšanas kritēriji

Nezināmo lielumu izvēle un apzīmēšana	1
Uzraksta vienādojumu, kas apraksta situāciju, kad skudra un gliemezis dodas viens otram pretī	3
Uzraksta vienādojumu, kas apraksta situāciju, kad abi dodas vienā virzienā	3
Atrisināta vienādojumu sistēma	2
Uzrakstīta atbilde	1
Uzrakstīta tikai atbilde un veikta pārbaude	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	59	60	45	24	29	7	5	15	23	16	368
Vidēji iegūtais punktu skaits				6,94								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir klasisks teksta uzdevums, ko risina skolas kursā.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) mainīgo ieviešana un vienādojumu sistēmas sastādīšana,
2) lineāru vienādojumu sistēmas atrisināšana.

10.2. Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 200 skolēni, no katra ēdienu veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējās ne vairāk kā vienu ēdienu, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Kāds ir lielākais skaits skolēnu, kas noteikti pasūtīja vienu un to pašu?

Atrisinājums. Pamatosim, ka lielākais skolēnu skaits, kas noteikti pasūtīja vienu un to pašu, ir 8. Ievērojam, ka katra veida ēdienu var vai nu neiekļaut komplektā, vai izvēlēties vienu no diviem tā veidiem, tātad katram ēdiena veidam ir 3 dažādas iespējas. Tā kā katrs skolēns izvēlējās vismaz vienu no piedāvātajiem ēdieniem (neder variants, ka no katra ēdiena veida neizvēlas neko), tad ir iespējams izveidot $3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$ dažādus pusdienu komplektus. Ja katru no šiem komplektiem būtu izvēlējušies ne vairāk kā 7 skolēni, tad pusdienās būtu aizgājuši ne vairāk kā $7 \cdot 26 = 182$ skolēni, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad noteikti ir 8 skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu. Nevar apgalvot, ka vairāk kā 8 skolēni pasūtīja vienu un to pašu, jo ir iespējams, ka pirmos 18 no 26 dažādajiem pusdienu komplektiem izvēlējās pa 8 skolēniem un atlikušos 8 pusdienu komplektus – pa 7 skolēniem (tas ir, $18 \cdot 8 + 8 \cdot 7 = 200$).

Piezīme. Treknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā skolēnu skaits ir $200 = 7 \cdot 26 + 18$, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir 8 skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.

Vērtēšanas kritēriji

Uzrakstīta atbilde, ka lielākais skolēnu, kas pasūtīja vienu un to pašu, ir 8	1
Iegūts, ka ir iespējams izveidot 26 dažādus pusdienu komplektus	3
Saprot, ka 200 skolēni jāsadala pa 26 grupām	1
Pamato, ka kādā grupā vienmēr būs vismaz 8 skolēni	3
Parāda piemēru, ka varētu neatrast vairāk kā 8 skolēnus, kas pasūtīja vienu un to pašu	2
Uzrakstīti tikai daži piemēri, kur kādā grupā ir 8 skolēni	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	117	82	50	49	52	98	29	15	35	101	29
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,24								

Skaidrojums par uzdevumu

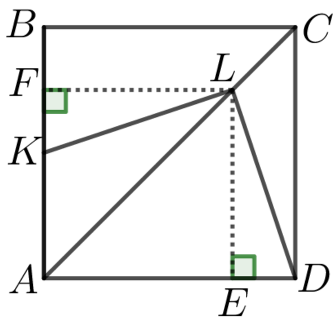
Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.
Uzdevums ir standartuzdevums par Dirihlē principu (skat. teoriju pielikumā).
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) objektu skaitīšana,
2) Dirihlē princips,
3) pierādījums no pretējā.

10.3. Punkts K ir kvadrāta $ABCD$ malas AB viduspunkts. Uz diagonāles AC atlikts tāds punkts L, ka $AL : LC = 3 : 1$. Pierādīt, ka $\sphericalangle KLD = 90°$.

Atrisinājums. No punkta L pret malām AB un AD novelkam attiecīgi perpendikulus LF un LE (skat. 43. att.). Simetrijas dēļ $LF = LE$. Tā kā $AL : LC = 3 : 1$, tad pēc Talesa teorēmas $ED = BF = \frac{1}{4}AB$. Līdz ar to $FK = BK - BF = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}AB$ un $FK = ED$.

Tātad $\Delta LFK = \Delta LED$ pēc pazīmes $m\ell m$ un $\sphericalangle FLK = \sphericalangle ELD$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Ievērojam, ka $\sphericalangle KLD = \sphericalangle KLE + \sphericalangle ELD = \sphericalangle KLE + \sphericalangle FLK = \sphericalangle FLE = 90°$.



43. att.

Piezīme. Iegūt prasīto var arī aprēķinot, ka $KD = \sqrt{\frac{5a}{4}}$ un $KL = LD = \sqrt{\frac{5a}{8}}$, kur a – kvadrāta malas garums, un izmantojot Pitagora teorēmas apgriezto teorēmu.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
No punkta L pret AB un AD novilkti perpendikuli	1
Pamatots, ka $LF = LE$	1
Pamatots, ka $FK = ED$	2
Pamatots, ka $\sphericalangle FLK = \sphericalangle ELD$	3
Iegūts, ka $\sphericalangle KLD = 90°$	3
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
No punkta L pret AB un AD novilkti perpendikuli	1
Pamatots, ka $LF = LE$	1
Pamatots, ka $FK = ED$	2
Aprēķina KD, KL, LD garumu	4
Izmanto Pitagora teorēmai apgriezto teorēmu	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	11	270	118	59	23	14	9	6	11	16	13	108
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,85								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) Talesa teorēma,
2) trijstūru vienādības pazīmes,
3) Pitagora teorēmai apgrieztā teorēma.

10.4. No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru izmantojot divas reizes, izveidoti trīs sešciparu skaitļi. Ar kādu lielāko nuļļu skaitu var beigties trīs izveidoto skaitļu summa?

Atrisinājums. Lielākais nuļļu skaits ir 5. Piemēram, $257899 + 327686 + 314415 = 900000$.

Pierādīsim, ka ar vairāk kā 5 nullēm skaitļu summa nevar beigties.

Skaitļus apzīmējam ar $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6}$ un $\overline{c_1c_2c_3c_4c_5c_6}$, tad to summa izsakāma kā

$$S = (a_1 + b_1 + c_1) \cdot 10^5 + (a_2 + b_2 + c_2) \cdot 10^4 + (a_3 + b_3 + c_3) \cdot 10^3 + (a_4 + b_4 + c_4) \cdot 10^2 + \\ +(a_5 + b_5 + c_5) \cdot 10 + (a_6 + b_6 + c_6)$$

Ņemot vērā, ka visu izmantoto ciparu summa ir $45 \cdot 2 = 90$, iegūstam

$$S = 99999(a_1 + b_1 + c_1) + 9999(a_2 + b_2 + c_2) + 999(a_3 + b_3 + c_3) + 99(a_4 + b_4 + c_4) + \\ +9(a_5 + b_5 + +c_5) + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 + a_3 + b_3 + c_3 + a_4 + b_4 + c_4 + \\ +a_5 + b_5 + c_5 + a_6 + b_6 + c_6 = \\ = 99999(a_1 + b_1 + c_1) + 9999(a_2 + b_2 + c_2) + 999(a_3 + b_3 + c_3) + 99(a_4 + b_4 + c_4) + \\ +9(a_5 + b_5 + c_5) + 90$$

Tātad izveidoto skaitļu summa S dalās ar 9. Trīs sešciparu skaitļu summa ir mazāka nekā 3 000 000, jo katrs saskaitāmais ir mazāks nekā 1 000 000. Vienīgie divi skaitļi ar sešām nullēm beigās, kas mazāki nekā 3 000 000, ir 1 000 000 un 2 000 000, kas nedalās ar 9. Tāpēc summa S nevar beigties ar sešām nullēm.

Piezīmes

1. Der arī $493862 + 511382 + 794756 = 1800000$ un
$921478 + 925176 + 853346 = 2700000$.

2. Vajadzīgo piemēru var atrast, piemeklējot ciparus, sākot ar skaitļu pēdējo ciparu.

Vērtēšanas kritēriji

Parādīts piemērs, ka skaitļu summa var beigties ar piecām nullēm	5
Pamatots, ka ar vairāk kā 5 nullēm skaitļu summa nevar beigties	5
Parādīts piemērs, ka skaitļu summa var beigties ar mazāk nekā piecām nullēm	Ne vairāk kā 2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	9	184	50	54	15	11	213	59	30	18	4	11
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,34								

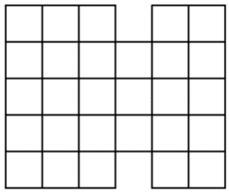
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) skaitļa pieraksts,
2) atbilstoša piemēra atrašana,
3) dalāmības pazīme ar 9.

10.5. Dota figūra, kuras laukums ir 28 rūtiņas (skat. 44. att.). Griežot pa rūtiņu līnijām, tā sagriezta septiņās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 4 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!

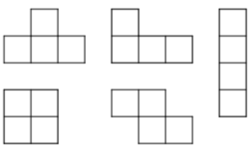


44. att.

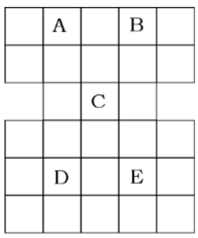
Atrisinājums. Dotās figūras perimetrs ir 26 vienības. Iegūto septiņu daļu perimetrus apzīmējam ar $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ un aplūkojam summu $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7$. Šajā summā katrs griezuma posms ir ieskaitīts divas reizes, bet katras daļas ārmalas posms – vienu reizi. Tad griezuma līniju kopgarumu var izteikt kā $\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 - 26)$. Tātad jācenšas minimizēt iegūto septiņu daļu perimetru summu. Pavisam ir piecas dažādas figūras, kas sastāv no četrām rūtiņām (skat. 45. att.). Visām figūrām, izņemot 2×2 kvadrātu, perimetrs ir 10 vienības, bet kvadrāta perimetrs ir 8 vienības.

Pamatosim, ka dotajā laukumā iespējams izvietot ne vairāk kā četrus 2×2 kvadrātus. Katrs 2×2 rūtiņu kvadrāts satur vienu rūtiņu, kas atzīmēta ar burtu (skat. 46. att.), tāpēc no dotās figūras nevar izgriezt vairāk kā piecus kvadrātus. Pieņemsim, ka viens no kvadrātiem satur rūtiņu "C". Ja "C" ir 2×2 kvadrāta apakšējās rindas rūtiņa, tad šis kvadrāts neļauj izgriezt vienu no kvadrātiem ar rūtiņu augšējā rindā ("A" vai "B"). Ja "C" ir 2×2 kvadrāta augšējās rindas rūtiņa, tad, izgriežot kvadrātus, kas satur "A" vai "B", tiktu norobežots divu rūtiņu liels laukums. Tātad no dotās figūras var izgriezt ne vairāk kā četrus 2×2 kvadrātus.

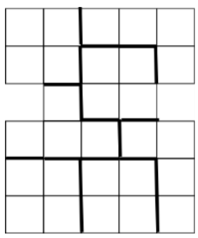
Līdz ar to mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums ir $(4 \cdot 8 + 3 \cdot 10 - 26) : 2 = 18$, to var iegūt, piemēram, kā parādīts 47. att.



45. att.



46. att.



47. att.

Vērtēšanas kritēriji

Parādīts piemērs, kur griezuma līniju kopgarums ir 18 vienības	4
Pamatots, ka griezuma līniju kopgarums būs minimālais, ja daļu perimetru summa būs vismazākā	2
Uzrakstīts (var būt bez pamatojuma), ka vienas daļas mazākais iespējamais perimetrs ir 8 vienības	1
Uzrakstīts (var būt bez pamatojuma), ka visām daļām, kas nav kvadrāts, perimetrs ir 10 vienības	1
Pamatots, ka var izgriezt ne vairāk kā četrus kvadrātus	2
Parādīts piemērs, kur griezuma līniju kopgarums ir vairāk nekā 18 vienības	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	77	43	74	23	142	64	77	36	67	16	34
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,41								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatoriskā ģeometrija.

Šis ir uzdevums par figūrām rūtiņu plaknē, kura risināšanā noder zināšanas par tetramino (polimino, kas sastāv no 4 rūtiņām), bet svarīgākais uzdevumā ir izpratne par lauztas līnijas garuma aprēķināšanu.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) lauztas līnijas garuma aprēķināšana,
3) visu figūru (tetramino), kas sastāv no 4 rūtiņām, perimetru aprēķināšana.

11. klase

11.1. Spīdolai ir 482 bildes un divi vienādi fotoalbumi. Pirmā albuma katrā lapā viņa ielīmēja tieši 21 bildi. Ja otrā albuma katrā lapā viņa ielīmētu tieši 19 bildes, tad lapu pietrūktu, savukārt, ja katrā lapā viņa ielīmētu tieši 23 bildes, tad vismaz viena lapa paliktu tukša. Cik lapu ir fotoalbumā?

Atrisinājums. Apzīmējam ar x lapu skaitu katrā fotoalbumā. Tad bilžu skaits, kas Spīdolai jāielīmē otrajā fotoalbumā, ir $(482-21x)$. Iegūstam nevienādību sistēmu:

$$\begin{cases} 19x < 482-21x \\ 23(x-1) \geq 482-21x \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} x < \frac{482}{40} = 12\frac{2}{40} \\ x \geq \frac{505}{44} = 11\frac{21}{44} \end{cases}$$

Tā kā lapu skaits ir naturāls skaitlis, tad fotoalbumā ir 12 lapas.

Piezīme. Ja sistēmas otrā nevienādība ir $23x > 482-21x$, tad iegūst, ka $x=11$ vai $x=12$, bet vērtība $x=11$ neder, jo tad albumā nepaliek vismaz viena tukša lapa.

Vērtēšanas kritēriji

Nezināmo lielumu izvēle un apzīmēšana	1
Izsaka, cik bilžu jāielīmē otrajā fotoalbumā	1
Uzraksta nevienādību, kas apraksta situāciju, ja katrā lapā ielīmētu tieši 19 bildes	2
Uzraksta nevienādību, kas apraksta situāciju, ja katrā lapā ielīmētu tieši 23 bildes	2
Atrisināta nevienādību sistēma	3
Uzrakstīta atbilde	1
Ja otrā nevienādība ir $23x > 482-21x$ un nav veikta pārbaude	Ne vairāk kā 8
Uzrakstīta tikai atbilde un veikta pārbaude	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	43	51	58	29	37	43	41	28	70	44	114
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,65								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir klasisks teksta uzdevums, ko risina skolas kursā.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) mainīgā ieviešana un nevienādību sistēmas sastādīšana,
2) nevienādību sistēmas atrisināšana.

11.2. Sporta zālē trenējas 32 cilvēki, kuri visi ir vismaz 21 gadu veci. Pierādīt, ka no šiem cilvēkiem var atrast divus tādus, kuriem ir vairāk nekā 30 gadi vai 4 tādus, kuru gadu skaits ir vienāds!

1. atrisinājums. Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda, tas ir, nav divu cilvēku, kuriem ir vairāk kā 30 gadi un nav četru cilvēku, kuriem ir vienāds gadu skaits. Sadalām cilvēkus grupās pēc to gadu skaita: $\{21\}; \{22\}; \{23\}; \ldots; \{29\}; \{30\}; \{\text{vairāk nekā } 30\}$. Tad pirmajās 10 grupās katrā ir ne vairāk kā 3 cilvēki un pēdējā – ne vairāk kā viens cilvēks. Tātad sporta zālē nav vairāk kā $3 \cdot 10 + 1 = 31$ cilvēks – pretruna. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka var atrast divus tādus cilvēkus, kuriem ir vairāk nekā 30 gadi vai 4 tādus, kuru gadu skaits ir vienāds.

2. atrisinājums. Sadalām cilvēkus grupās pēc to gadu skaita:

$$\{21\};\ \ \{22\};\ \ \{23\};\ \ldots;\ \{29\};\ \ \{30\};\ \ \{\text{vairāk nekā } 30\}.$$

Ja pēdējā grupā ir vismaz divi cilvēki, tad prasītais izpildās.

Ja pēdējā grupā ir mazāk nekā divi cilvēki, tad pa atlikušajām grupām jāsadala vismaz 31 cilvēks. Tā kā ir 10 grupas un vismaz $31 = 3 \cdot 10 + 1$ cilvēks, tad pēc Dirihlē principa kādā no šīm grupām ir vismaz 4 cilvēki, tātad tiem gadu skaits ir vienāds.

Vērtēšanas kritēriji

Uzraksta, ka cilvēki jādala grupās pēc to vecuma: $\{21\}; \{22\}; \{23\}; \ldots; \{29\}; \{30\}; \{\text{vairāk nekā } 30\}$	3
Pamato prasīto	7
Uzrakstīti tikai daži piemēri, kur prasītais izpildās	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	9	88	35	28	26	10	15	8	20	35	48	239
Vidēji iegūtais punktu skaits				6,47								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Uzdevums ir standartuzdevums par Dirihlē principu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) objektu skaitīšana un grupēšana,
2) Dirihlē princips,
3) pierādījums no pretējā.

11.3. Trapeces $ABCD$ pamatu AB un CD garumu summa ir vienāda ar sānu malas AD garumu. Pierādīt, ka leņķu DAB un CDA bisektrises krustojas BC viduspunktā!

Atrisinājums. Bisektrišu krustpunktu apzīmējam ar F (skat. 48. att.). Ir jāpierāda, ka F atrodas uz BC, un arī, ka $FB = FC$.

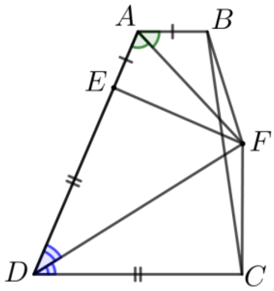
Pierādīsim, ka $FB = FC$. Uz AD izvēlamies tādu punktu E, ka $EA = AB$, tad $DE = DC$ (jo $AE + ED = AD = AB + DC$). Tad $\Delta AEF = \Delta ABF$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF$; $AB = AE$ un AF – kopīga un $\Delta EDF = \Delta CDF$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $\sphericalangle EDF = \sphericalangle CDF$; $ED = DC$ un

DF – kopīga. Tā kā vienādos trijstūros attiecīgās malas ir vienādas, tad $BF = EF = CF$. Tātad punkts F atrodas vienādā attālumā no B un C.

Atliek pierādīt, ka F atrodas uz BC. Apskatot četrstūrus $ABFE$ un $EFCD$ un izmantojot, ka četrstūra iekšējo leņķu summa ir 360° un ka trapeces sānu malas pieleņķu summa ir 180°, iegūstam

$$\sphericalangle BFC = \sphericalangle BFE + \sphericalangle EFC =$$
$$= (360° - \sphericalangle ABF - \sphericalangle BAE - \sphericalangle AEF) + (360° - \sphericalangle FED - \sphericalangle EDC - \sphericalangle DCF) =$$
$$= 720° - (\sphericalangle ABF + \sphericalangle DCF) - (\sphericalangle BAE + \sphericalangle EDC) - (\sphericalangle AEF + \sphericalangle FED) =$$
$$= 720° - 180° - 180° - 180° = 180°$$

Esam ieguvuši, ka $\sphericalangle BFC$ ir izstiepts leņķis, līdz ar to F atrodas uz BC.



48. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Zīmējumā atlikts tāds punkts E, ka $AB = AE$ un $ED = DC$	1
Pamatots, ka $\Delta BAF = \Delta EAF$ un $\Delta FED = \Delta FCD$	3
Pamatots, ka $BF = CF$	1
Pamatots, ka F atrodas uz BC	5

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	14	234	107	42	26	15	47	8	14	12	8	34
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,23								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūru vienādības pazīmes,
2) četrstūra iekšējo leņķu summa,
3) trapeces sānu malas pieleņķu summa.

11.4. No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru izmantojot divas reizes, izveidoja vienu septiņciparu, vienu sešciparu un vienu piecciparu skaitli. Ar kādu lielāko nuļļu skaitu var beigties trīs izveidoto skaitļu summa?

Atrisinājums. Lielākais nuļļu skaits ir 6. Piemēram, $8514789 + 421679 + 63532 = 9000000$.

Pierādīsim, ka ar vairāk kā 6 nullēm skaitļu summa nevar beigties.

Skaitļus apzīmējam ar $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6}$ un $\overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$, tad to summa izsakāma kā

$$S = a_1 \cdot 10^6 + (a_2 + b_1) \cdot 10^5 + (a_3 + b_2 + c_1) \cdot 10^4 + (a_4 + b_3 + c_2) \cdot 10^3 + (a_5 + b_4 + c_3) \cdot 10^2 + \\ +(a_6 + b_5 + c_4) \cdot 10 + (a_7 + b_6 + c_5);$$

Ņemot vērā, ka visu izmantoto ciparu summa ir $45 \cdot 2 = 90$, iegūstam

$$S = 999999a_1 + 99999(a_2 + b_1) + 9999(a_3 + b_2 + c_1) + 999(a_4 + b_3 + c_2) + 99(a_5 + b_4 + c_3) + \\ +9(a_6 + b_5 + c_4) + (a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 + a_3 + b_3 + c_3 + a_4 + b_4 + c_4 + a_5 + b_5 + c_5 + \\ +a_6 + b_6 + a_7 = \\ = 999999a_1 + 99999(a_2 + b_1) + 9999(a_3 + b_2 + c_1) + 999(a_4 + b_3 + c_2) + 99(a_5 + b_4 + c_3) + \\ +9(a_6 + b_5 + c_4) + 90.$$

Tātad visu izveidoto skaitļu summa dalās ar 9.

Septiņciparu, sešciparu un piecciparu skaitļu summa ir mazāka nekā $10\,000\,000 + 1\,000\,000 + 100\,000 = 11\,100\,000$, un vienīgais skaitlis ar septiņām nullēm beigās, kas ir mazāks nekā 11 100 000, ir 10 000 000, kas nedalās ar 9. Tāpēc summa S nevar beigties ar septiņām nullēm.

Piezīme. Vajadzīgo piemēru var atrast, piemeklējot ciparus, sākot ar skaitļu pēdējo ciparu.

Vērtēšanas kritēriji

Parādīts piemērs, ka skaitļu summa var beigties ar sešām nullēm	5
Pamatots, ka ar vairāk nekā 6 nullēm skaitļu summa nevar beigties	5
Parādīts piemērs, ka skaitļu summa var beigties ar mazāk nekā sešām nullēm	Ne vairāk kā 2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	10	186	73	109	16	10	90	41	10	9	3	4
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,33								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) skaitļa pieraksts,
2) atbilstoša piemēra atrašana,
3) dalāmības pazīme ar 9.

11.5. Pierādīt, ka $a^4+b^4+c^4+d^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2 \geq 10abcd$ visiem reāliem skaitļiem a, b, c, d.

1. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd+(a^2b^2-2abcd+c^2d^2)+(a^2c^2-2abcd+b^2d^2)+$
$+(b^2c^2-2abcd+d^2a^2) \geq 0;$
$(a^4-2a^2b^2+b^4)+(c^4-2c^2d^2+d^4)+(2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd)+(ab-cd)^2+$
$+(ac-bd)^2++(bc-da)^2 \geq 0;$
$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2+(ab-cd)^2+(ac-bd)^2+(bc-da)^2 \geq 0.$

Tā kā katrs saskaitāmais ir nenegatīvs, tad pēdējā nevienādība ir patiesa un arī dotā nevienādība ir patiesa.

2. atrisinājums. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, novērtējam dotās nevienādības kreiso pusi:

$$a^4+b^4+c^4+d^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2 \geq$$
$$\geq 10\cdot\sqrt[10]{a^4\cdot b^4\cdot c^4\cdot d^4\cdot a^2b^2\cdot b^2c^2\cdot c^2d^2\cdot d^2a^2\cdot a^2c^2\cdot b^2d^2}=$$
$$=10\cdot\sqrt[10]{a^{10}\cdot b^{10}\cdot c^{10}\cdot d^{10}}=10\cdot|abcd|\geq 10abcd.$$

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Atdalīti kvadrāti $(ab-cd)^2;\ (ac-bd)^2;\ (bc-da)^2$	6
Atdalīti kvadrāti $(a^2-b^2)^2;\ (c^2-d^2)^2; 2(ab-cd)^2$	3
Secinājums, ka dotā nevienādība ir patiesa	1
Ideja, ka var izmantot formulu $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$	1
2. atrisinājums	
Izmantota nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, un iegūts vajadzīgais	10
Ideja, ka var izmantot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	22	267	93	46	15	3	3	24	4	3	11	70
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,32								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir standartuzdevums par nevienādību pierādīšanu, atdalot pilno kvadrātu vai arī izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana.

12. klase

12.1. Divas sniega tīrāmās mašīnas, strādājot vienlaicīgi, Sūnu ciema ielas var notīrīt 4 h 12 min. Ja pirmās mašīnas darba ražīgumu palielinātu divas reizes, bet otra mašīna sāktu strādāt par 10 minūtēm vēlāk nekā pirmā, tad sniegu notīrītu 2 h 30 min. Cik stundās sniegu Sūnu ciemā notīrītu, ja strādātu tikai otrā sniega tīrāmā mašīna?

Atrisinājums. Apzīmējam: x – tik stundās pirmā mašīna notīrītu sniegu, ja strādātu viena; y – tik stundās otrā mašīna notīrītu sniegu, ja strādātu viena. Tad vienā stundā pirmā mašīna notīrītu $\frac{1}{x}$ no visa sniega un otra mašīna notīrītu $\frac{1}{y}$ no visa sniega. Tā kā, strādājot vienlaicīgi, abas mašīnas sniegu var notīrīt 4 h 12 min jeb 4,2 stundās, iegūstam vienādojumu $\frac{4,2}{x} + \frac{4,2}{y} = 1$.

Ja pirmās mašīnas darba ražīgumu palielinātu divas reizes, tad tā vienā stundā notīrītu $\frac{2}{x}$ no visa sniega. Ja otra mašīna sāktu strādāt par 10 minūtēm vēlāk nekā pirmā, tad tā būtu strādājusi 2 h 20 min jeb $\frac{7}{3}$ h. Iegūstam vienādojumu $\frac{2 \cdot 2,5}{x} + \frac{\frac{7}{3}}{y} = 1$.

Apzīmējot $\frac{1}{x} = a$ un $\frac{1}{y} = b$, iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 4,2a + 4,2b = 1 \\ 5a + \frac{7}{3}b = 1 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} 21a + 21b = 5 \\ -21a - 9,8b = -4,2 \end{cases}$$

Saskaitot abus pēdējās sistēmas vienādojumus, iegūstam $11,2b = 0,8$ jeb $b = \frac{8}{112} = \frac{1}{14}$. Tātad $y = \frac{1}{b} = 14$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka otrā sniega tīrāmā mašīna sniegu Sūnu ciemā notīrītu 14 stundās.

Vērtēšanas kritēriji

Nezināmo lielumu izvēle un apzīmēšana	1
Izsaka, cik daudz sniega katra mašīna notīra vienā stundā	1
Uzraksta vienādojumu, kas apraksta situāciju, ja abas mašīnas strādā vienlaicīgi	2
Uzraksta otru vienādojumu	2
Atrisināta vienādojumu sistēma	3
Uzrakstīta atbilde	1
Uzrakstīta tikai atbilde un veikta pārbaude	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	13	104	130	20	14	15	5	9	5	13	18	107
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,91								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir klasisks teksta uzdevums par kopīgo darbu, ko risina skolas kursā.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) mainīgo ieviešana un vienādojumu sistēmas sastādīšana,
2) vienādojumu sistēmas atrisināšana.

12.2. Pierādīt, ka starp jebkuriem 78 trīsciparu skaitļiem var atrast četrus tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas!

Atrisinājums. Pavisam iespējamas 27 dažādas ciparu summas vērtības:

Ciparu summa	**Trīsciparu skaitļi**
1	100
2	101; 110; 200
…	…
26	899; 989; 998
27	999

Ievērojam, ka

1) ciparu summa 1 un 27 katra ir tikai vienam skaitlim (100 un 999),

2) ciparu summa 2 un 26 katra ir tikai trīs skaitļiem (101; 110; 200 un 899; 989; 998).

Tātad šajās grupās vairāk skaitļu nevar būt neatkarīgi no tā, kurus 78 trīsciparu skaitļus izvēlamies. Pieņemsim, ka šīs četras grupas ir maksimāli piepildītas – tajās kopā ievietoti 8 skaitļi. Tad atlikušajās 23 grupās jāievieto $78-8=70$ skaitļi. Ja katrā no šīm 23 grupām būtu ievietoti ne vairāk kā 3 skaitļi, tad kopā būtu izvietoti ne vairāk kā $3\cdot 23=69$ skaitļi – pretruna tam, ka pa grupām jāizvieto 70 skaitļi. Līdz ar to noteikti ir tāda grupa, kurā ir vismaz četri skaitļi – tie arī ir meklētie četri skaitļi, kuru ciparu summas ir vienādas.

Piezīme. Treknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā $70=3\cdot 23+1$, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir tāda grupa, kurā ir vismaz četri skaitļi – tie arī ir meklētie četri skaitļi, kuru ciparu summas ir vienādas.

Vērtēšanas kritēriji

Uzraksta, ka pavisam iespējamas 27 dažādas ciparu summas vērtības	2
Uzraksta, ka ciparu summa 1 un 27 katra ir tikai vienam skaitlim un ciparu summa 2 un 26 katra ir tikai trīs skaitļiem	2
Iegūst, ka atlikušajās 23 grupās jāievieto 70 skaitļi	2
Pamato, ka kādā no šīm grupām vienmēr būs vismaz četri skaitļi	4
Uzrakstīti tikai daži piemēri, kur prasītais izpildās	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	89	38	45	29	30	14	11	16	20	35	121
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,06								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

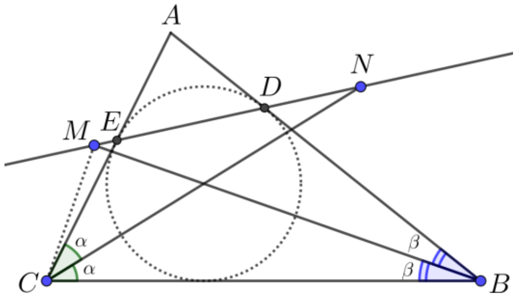
Uzdevums ir standartuzdevums par Dirihlē principu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) objektu skaitīšana un grupēšana,
2) Dirihlē princips,
3) pierādījums no pretējā.

12.3. Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras malai AB punktā D, bet malai AC punktā E. Leņķu B un C bisektrises krusto taisni DE attiecīgi punktos M un N. Pierādīt, ka punkti B, C, M un N atrodas uz vienas riņķa līnijas!

Atrisinājums. Tā kā CN un BM ir bisektrises, tad $\sphericalangle ACN = \sphericalangle NCB = \alpha$ un $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBC = \beta$ (skat. 49. att.). No trijstūra ABC iegūstam, ka $\sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCA = 180° - 2\alpha - 2\beta$. Tā kā $AE = AD$ kā pieskaru nogriežņi, kas vilkti no punkta A, tad trijstūris EAD ir vienādsānu un $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = \alpha + \beta$. Tā kā $\sphericalangle AEN$ ir trijstūra NEC ārējais leņķis, tad $\sphericalangle AEN = \sphericalangle ECN + \sphericalangle ENC$, no kurienes $\sphericalangle ENC = \sphericalangle AEN - \sphericalangle ECN = \alpha + \beta - \alpha = \beta$. Tā kā $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MBC = \beta$, tad ap četrstūri $CMNB$ var apvilkt riņķa līniju, tas ir, punkti B, C, M un N atrodas uz vienas riņķa līnijas.



49. att.

Piezīme. Risinājumā izmantota apgrieztā teorēma par ievilktajiem leņķiem: ja četrstūrī $ABCD$ ir spēkā vienādība $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, tad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
No trijstūra ABC izsaka leņķa A lielumu	1
Pamato, ka trijstūris EAD ir vienādsānu	2
Izsaka $\sphericalangle AED$ lielumu	2
Izsaka $\sphericalangle CED$ lielumu	2
Izsaka $\sphericalangle MNC$ lielumu	2
Secina, ka ap četrstūri $CMNB$ var apvilkt riņķa līniju	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	28	283	82	31	8	4	1	0	2	2	2	10
Vidēji iegūtais punktu skaits				0,79								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pieskaru nogriežņu īpašība,
2) vienādsānu trijstūra pazīme,
3) leņķu izteikšana,
4) apgrieztā teorēma par ievilktajiem leņķiem – ja četrstūrī $ABCD$ ir spēkā vienādība $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, tad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

12.4. Doti naturāli skaitļi a un b. Pierādīt

a) ja $20a + 18b$ dalās ar 7, tad $201a + 8b$ dalās ar 7;

b) ja $201a + 8b$ dalās ar 7, tad $20a + 18b$ dalās ar 7.

Atrisinājums. a) Ja $20a + 18b$ dalās ar 7, tad arī $6a + 4b$ dalās ar 7, jo $20a + 18b = 14a + 14b + (6a + 4b)$. Tas nozīmē, ka arī $7 \cdot 27a + 2(6a + 4b) = 201a + 8b$ dalās ar 7.

b) Ja $201a + 8b$ dalās ar 7, tad arī $201a + 8b - 7(28a + b) = 5a + b$ dalās ar 7. Tas nozīmē, ka arī $18(5a + b) - 7 \cdot 10a = 20a + 18b$ dalās ar 7.

Vērtēšanas kritēriji

a) gadījums (kopā 5 punkti)	
Izsaka $201a + 8b$ kā vairāku saskaitāmo summu, no kuriem katrs dalās ar 7	5
b) gadījums (kopā 5 punkti)	
Izsaka $20a + 18b$ kā vairāku saskaitāmo summu, no kuriem katrs dalās ar 7	5

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	32	236	59	36	6	9	8	3	5	2	3	54
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,05								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Uzdevums ir standartuzdevums par dalāmību.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) dalāmības īpašības,
2) izteiksmes pārveidošana par vairāku saskaitāmo summu, no kuriem katrs dalās ar 7.

12.5. Vienādojuma ar veseliem koeficientiem $x^4 + bx^2 + c = 0$ vienas saknes vērtība ir $\sqrt{20} - \sqrt{18}$. Atrast vienādojuma koeficientus un pārējās trīs saknes!

Atrisinājums. Ievērojam, ja $x = \sqrt{20} - \sqrt{18}$, tad $x^2 = 38 - 12\sqrt{10} > 0$ un $x^4 = 2884 - 912\sqrt{10}$.

Ievietojot doto sakni dotajā vienādojumā, iegūstam

$$2884 - 912\sqrt{10} + b\left(38 - 12\sqrt{10}\right) + c = 0; \qquad (*)$$

$$2884 + 38b + c - 912\sqrt{10} - 12\sqrt{10}b = 0$$

Lai pastāvētu vienādība, iracionālajai un racionālajai daļai katrai atsevišķi jābūt 0, tas ir,

$$\begin{cases} 2884 + 38b + c = 0 \\ -912\sqrt{10} - 12b\sqrt{10} = 0 \end{cases}$$

Atrisinot iegūto vienādojumu sistēmu, iegūstam $b = -\frac{912}{12} = -76$ un $c = -2884 + 2888 = 4$.

Tātad sākotnējais vienādojums ir $x^4 - 76x^2 + 4 = 0$.

Aplūkojot (*), ievērojam, ka veiktie spriedumi un iegūtais vienādojums nebūtu mainījies, ja iracionālās daļas vērtība būtu ar pretēju zīmi, tas ir, $2884 + 912\sqrt{10} + b\left(38 + 12\sqrt{10}\right) + c = 0$, bet šādu sakarību var iegūt, ja $x = \sqrt{20} + \sqrt{18}$. No kā izriet, ka $x = \sqrt{20} + \sqrt{18}$ arī ir dotā vienādojuma sakne.

Ņemot vērā, ka $(-x)$ ir dotā vienādojuma sakne, ja x ir šī vienādojuma sakne, iegūstam, ka vienādojuma saknes ir $x_{1,2} = \sqrt{20} \pm \sqrt{18}$ un $x_{3,4} = -\sqrt{20} \pm \sqrt{18}$.

Vērtēšanas kritēriji

Uzraksta, ka arī $(-x)$ ir dotā vienādojuma sakne, tas ir, arī $x = -\sqrt{20} + \sqrt{18}$	1
Ievietojot doto sakni dotajā vienādojumā, iegūst vienādojumu $884 - 912\sqrt{10} + b\left(38 - 12\sqrt{10}\right) + c = 0$	3
Iegūst, ka vienīgās derīgās vērtības ir $b = -76$ un $c = 4$, tas ir, sākotnējais vienādojums ir $x^4 - 76x^2 + 4 = 0$	3
Iegūst, ka $x = \sqrt{20} + \sqrt{18}$ ir vienādojuma sakne	2
Secina, ka arī $x = \sqrt{20} - \sqrt{18}$ ir vienādojuma sakne	1
Iegūtas b un c vērtības bez pamatojuma, ka tās ir vienīgās iespējamās (konstruēts viens derīgs vienādojums), un aprēķinātas pārējās saknes	6

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	29	166	95	52	25	13	4	10	6	8	12	33
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,24								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) dotās saknes ievietošana dotajā vienādojumā un vienādojumu sistēmas sastādīšana attiecībā pret nezināmajiem lielumiem,
2) iracionālās izteiksmes saistītā izteiksme,
3) darbības ar iracionāliem skaitļiem
4) augstāku kārtu vienādojumu risināšana.

Valsts olimpiāde - 2018

9. klase

9.1. Zināms, ka a un b ir pozitīvi skaitļi, un kvadrātfunkciju $y = ax^2 + 2018x + b$ un $y = bx^2 + 2018x + a$ minimālo vērtību summa ir nulle. Pierādīt, ka katrai no šīm kvadrātfunkcijām minimālā vērtība ir nulle!

1. atrisinājums. Abām dotajām kvadrātfunkcijām ir vienāds sakņu skaits, jo tām ir vienāds diskriminants $D = 2018^2 - 4ab$. Ja tām abām būtu divas saknes, tad to minimālās vērtības būtu negatīvas un to summa arī būtu negatīva. Ja tām abām nebūtu sakņu, tad to minimālās vērtības būtu pozitīvas un summa arī pozitīva. Tātad tām abām ir tieši viena sakne, kas nozīmē, ka to minimālā vērtība ir nulle.

2. atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad abu parabolu zari ir vērsti uz augšu un kvadrātfunkciju minimālā vērtība sakrīt ar parabolas virsotnes y koordinātu. Parabolas $y = ax^2 + 2018x + b$ virsotnes koordinātas ir

$$x_{v_1} = -\frac{2018}{2a} = -\frac{1009}{a} \quad \text{un} \quad y_{v_1} = a \cdot \left(-\frac{1009}{a}\right)^2 + 2018 \cdot \left(-\frac{1009}{a}\right) + b = -\frac{1009^2}{a} + b,$$

bet parabolas $y = bx^2 + 2018x + a$ virsotnes koordinātas ir

$$x_{v_2} = -\frac{1009}{b} \quad \text{un} \quad y_{v_2} = b \cdot \left(-\frac{1009}{b}\right)^2 + 2018 \cdot \left(-\frac{1009}{b}\right) + a = -\frac{1009^2}{b} + a.$$

Tā kā abu kvadrātfunkciju minimālo vērtību summa ir nulle, tad

$$-\frac{1009^2}{a} + b - \frac{1009^2}{b} + a = 0;$$

$$a + b - \frac{1009^2}{ab}(a + b) = 0;$$

$$(a + b)\left(1 - \frac{1009^2}{ab}\right) = 0$$

Tā kā $a + b > 0$, tad $\left(1 - \frac{1009^2}{ab}\right) = 0$ jeb $ab = 1009^2$. Tātad $b = \frac{1009^2}{a}$ un $y_{v_1} = -\frac{1009^2}{a} + \frac{1009^2}{a} = 0$. Līdzīgi iegūst, ka $y_{v_2} = 0$.

Piezīme. Kvadrātfunkcijas minimālo vērtību var atrast arī atdalot pilno kvadrātu:

$$y = ax^2 + 2018x + b = a\left(x^2 + 2 \cdot 1009 \cdot x \cdot \frac{1}{a} + \frac{1009^2}{a^2}\right) + b - \frac{1009^2}{a^2} =$$

$$= a\left(x + \frac{1009}{a}\right)^2 + b - \frac{1009^2}{a^2}.$$

Tā kā $a\left(x + \frac{1009}{a}\right)^2 \geq 0$, tad kvadrātfunkcijas minimālā vērtība $y_{v_1} = b - \frac{1009^2}{a^2}$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	10	34	8	2	3	2	0	1	1	1	1	10
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,52								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums par kvadrātfunkcijas vērtību noteikšanu.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) diskriminanta aprēķināšana,
2) parabolas virsotnes x un y koordinātas aprēķināšana,
3) izteiksmes vērtības novērtēšana.

9.2. Izvēlēti trīs dažādi naturāli skaitļi un aprēķināti to reizinājumi pa pāriem, iegūstot trīs reizinājumus. Pierādīt, ka šos reizinājumus, dalot ar 4, vismaz divi dod vienādus atlikumus!

Atrisinājums. Katru naturālu skaitli n var izteikt formā $n = 4b + a$, kur $b \in \mathbb{Z}$ un a ir skaitļa n atlikums, dalot ar 4. Iespējamās atlikuma a vērtības ir 0, 1, 2 vai 3. Apskatām visus iespējamos gadījumus, kādus atlikumus var dot trīs izvēlētie skaitļi.

1) Ja kāds no skaitļiem dalās ar 4 (jeb dod atlikumu 0), tad šī skaitļa reizinājums ar pārējiem diviem skaitļiem arī dalās ar 4 jeb šie divi reizinājumi dod atlikumu 0.

2) Ja neviens no skaitļiem nedalās ar 4, tad iespējami divi gadījumi.

a) Ja vismaz diviem skaitļiem atlikums, dalot ar 4, ir vienāds, tas ir, skaitļus varam izteikt formā $4k + q$; $4m + q$ un $4n + p$, tad reizinājumiem $(4k + q)(4n + p) = 4(4kn + kp + nq) + qp$ un $(4m + q)(4n + p) = 4(4mn + mp + nq) + qp$ atlikums ir vienāds ar qp atlikumu, dalot ar 4.

b) Ja visi atlikumi ir dažādi, tad viena skaitļa atlikums, dalot ar 4, ir 1, otra – 2, trešā – 3, tas ir, skaitļus varam izteikt formā $4k + 1$; $4m + 2$ un $4n + 3$. Tad reizinājuma $(4k + 1)(4m + 2) =$ $= 4(4km + 2k + m) + 2$ atlikums ir vienāds ar reizinājuma $(4m + 2)(4n + 3) =$ $= 4(4mn + 3m + 2n + 4) + 2$ atlikumu, tas ir, ir vienāds ar 2.

Esam aplūkojuši visus gadījumus, un prasītais pierādīts.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	9	9	4	2	7	2	5	4	4	1	23
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,57								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

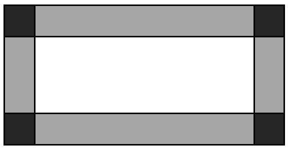
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par dalīšanu ar atlikumu,
2) gadījumu šķirošana.

9.3. Rūtiņu tabulas ar izmēriem 8×14 katrā rūtiņā sēž tieši viena muša. Visas mušas pārlido uz citu tabulu ar izmēriem 7×16 rūtiņas tā, ka katrā rūtiņā atkal ir tieši viena muša. Vai iespējams, ka visas mušas, kas bija kaimiņi sākotnējā izvietojumā (tas ir, atradās blakus rūtiņās ar kopīgu malu), būs kaimiņi arī jaunajā izvietojumā?

1. atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Pieņemsim, ka mušas ir pārlidojušas tā, ka visas, kas bija kaimiņos pirms pārlidošanas, ir kaimiņos arī pēc tās. Ievērojam, ka stūra rūtiņā (skat. 50. att. melnās rūtiņas) sēdošai mušai ir tieši 2 kaimiņi, malējā rūtiņā (pelēkās rūtiņas) – tieši 3 kaimiņi un vidējā rūtiņā (baltās rūtiņas) – tieši 4 kaimiņi. Skaidrs, ka katrai mušai kaimiņu skaits nemainās vai palielinās (ja tas samazinātos, tad kādu no kaimiņiem tā būtu pazaudējusi). Tātad stūra rūtiņās, kurās mušām ir tikai divi kaimiņi, var ielidot tikai mušas, kas arī pirms tam bijušas stūros. Tabulā ar izmēriem 8×14 rūtiņas ir 36 malējās rūtiņas, bet tabulai ar izmēriem 7×16 ir 38 malējās rūtiņas. Tā kā abās tabulās ir vienāds rūtiņu skaits, tad divas malējās rūtiņas būs jāaizņem mušām, kuras atradās sākotnējās tabulas vidējās rūtiņās, bet tad tās būtu pazaudējušas vismaz vienu kaimiņu, kas ir pretrunā ar pieņēmumu.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Saskaitīsim, cik mušu pāri bija kaimiņi pirms un pēc pārlidošanas. Kaimiņu katrā tabulā ir tieši tik, cik ir iekšējo līniju, katra iekšējā līnija atdala divas kaimiņu mušas. Tātad pirms pārlidošanas kaimiņu skaits bija $7 \cdot 14 + 8 \cdot 13 = 202$, bet pēc pārlidošanas tas ir $6 \cdot 16 + 7 \cdot 15 = 201$, tātad ir vismaz viens mušu pāris, kas bija kaimiņi pirms pārlidošanas, bet nav kaimiņi pēc pārlidošanas.



50. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	2	3	7	4	1	0	1	3	1	1	49
Vidēji iegūtais punktu skaits			7,88									

Skaidrojums par uzdevumu

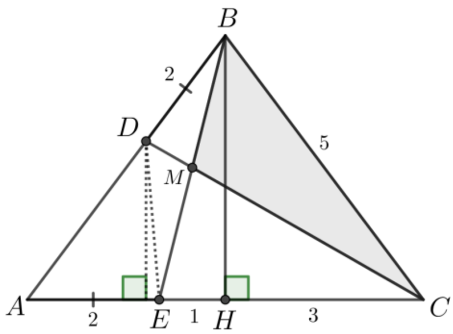
Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) objektu skaitīšana,
2) vispārīgs pamatojums, ka prasītais nav iespējams.

9.4. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AC = 6$ un $AB = BC = 5$. Uz malas AB atlikts tāds punkts D, ka $BD = 2$, un uz malas AC atlikts tāds punkts E, ka $AE = 2$. Nogriežņi BE un CD krustojas punktā M. Aprēķināt trijstūra BMC laukumu!

1. atrisinājums. Novelkam trijstūrī ABC augstumu BH (skat. 51. att.). Tā kā BH ir arī mediāna, tad $HC = \frac{1}{2}AC = 3$, un pēc Pitagora teorēmas ΔBHC aprēķinām $BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = 4$. Tad $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH \cdot AC = 12$. Tā kā trijstūriem BCD un DCA ir kopīgs augstums no virsotnes C, tad $S_{BDC} = \frac{2}{5}S_{ABC} = \frac{24}{5}$ un $S_{ADC} = \frac{3}{5}S_{ABC} = \frac{36}{5}$. Iegūstam, ka $h_{AC} = \frac{2S_{ADC}}{AC} = \frac{12}{5}$, kur h_{AC} ir no virsotnes D vilktais augstums. Aprēķinām $S_{DEC} = \frac{1}{2}EC \cdot h_{AC} = \frac{24}{5}$. Tātad $S_{DEC} = S_{BDC}$. Tas nozīmē, ka augstums no B pret CD ir vienāds ar augstumu no E pret CD, no kā izriet, ka trijstūru BMC un EMC laukumi ir vienādi. Tātad $S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 4$.

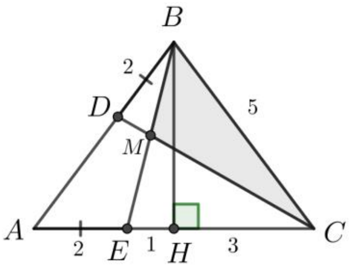


51. att.

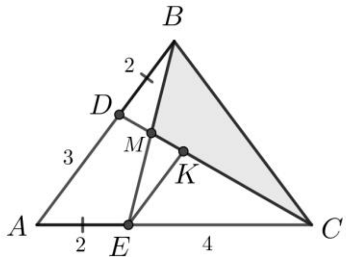
2. atrisinājums. Novelkam trijstūrī ABC augstumu BH (skat. 52. att.). Tā kā BH ir arī mediāna, tad $HC = \frac{1}{2}AC = 3$, un pēc Pitagora teorēmas ΔBHC aprēķinām $BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = 4$. Tad $S_{BEC} = \frac{1}{2}EC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. Novelkam $EK || AB$, kur punkts K atrodas uz CD (skat. 53. att.). Tad $\Delta ACD \sim \Delta ECK$, jo $EK || AD$. Tad $\frac{EK}{AD} = \frac{EC}{AC}$ jeb $\frac{EK}{3} = \frac{4}{6}$ no kā izriet, ka $EK = 2$.

Tā kā $\sphericalangle DBM = \sphericalangle KEM$ un $\sphericalangle BDM = \sphericalangle EKM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm un $BD = EK = 2$, tad $\Delta DMB = \Delta KME$ pēc pazīmes $\ell m \ell$.

Tā kā $BM = ME$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros un trijstūriem BMC un MEC sakrīt augstums, tad $S_{BMC} = S_{MEC} = \frac{1}{2}S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$.



52. att.



53. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	9	5	19	8	6	7	6	2	6	1	0	4
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,33								

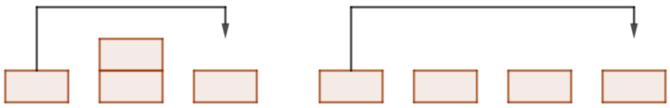
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

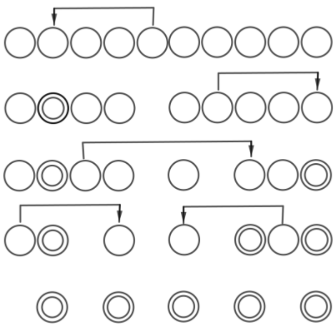
1) Pitagora teorēma,
2) figūru laukumu izteikšana,
3) trijstūru līdzības pazīmes.

9.5. Rindā izvietotas 2018 monētas. Vienā gājienā drīkst paņemt vienu monētu, pārcelt to pāri tieši divām monētām un uzlikt to uz nākamās monētas (skat., piemēram, 54. att.). Vai 1009 gājienos visas monētas iespējams savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē?

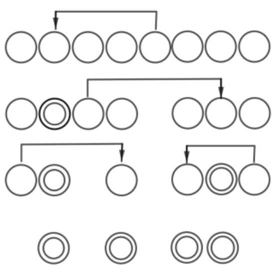


54. att.

Atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais ir iespējams. Ja ir 10 monētas vai 8 monētas, tad attiecīgi ar 5 vai 4 gājieniem tās var savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē, skat., piemēram, 55. att. un 56. att. Tā kā $2018 = 201 \cdot 10 + 8$, tad ar $201 \cdot 5 + 4 = 1009$ gājieniem monētas iespējams savākt kaudzītēs pa divām monētām katrā kaudzītē.



55. att.



56. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	42	4	6	10	0	1	1	1	0	1	2
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,37								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) vieglāka uzdevuma apskatīšana, ja ir 10 monētas vai 8 monētas,
2) objektu grupēšana,
3) vispārīga algoritma izstrāde.

10. klase

10.1. Atrast visus tādus veselu skaitļu pārus $(x; y)$, kas apmierina nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0 \\ x + 2y < \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Atrisinājums. Pārveidojam sistēmas pirmo nevienādību

$$2(x^2 + 12x + 36) + 2(y^2 - 14y + 49) - 3 < 0;$$

$$(x + 6)^2 + (y - 7)^2 < \frac{3}{2}.$$

Skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs. Ja divu nenegatīvu veselu skaitļu summa ir mazāka nekā $\frac{3}{2}$, tad šie skaitļi var būt tikai (0; 0), (1; 0) vai (0; 1).

$(x+6)^2$	$(y-7)^2$	x	y	$x+2y$	
0	0	-6	7	$-6 + 14 = 8 > \frac{15}{2}$	neder
0	1	-6	8	$-6 + 16 = 10 > \frac{15}{2}$	neder
0	1	-6	6	$-6 + 12 = 6 < \frac{15}{2}$	
1	0	-5	7	$-5 + 14 = 9 > \frac{15}{2}$	neder
1	0	-7	7	$-7 + 14 = 7 < \frac{15}{2}$	

Līdz ar to dotajai sistēmai ir divi atrisinājumi $(-6; 6)$ un $(-7; 7)$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	32	7	13	3	1	2	1	0	1	1	22
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,60								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana un visu iespējamo gadījumu apskatīšana.

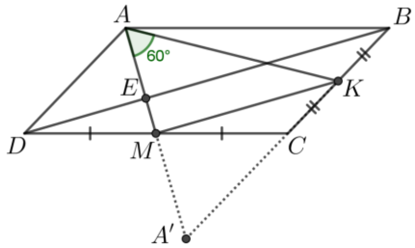
10.2. Paralelograma $ABCD$ malu BC un CD viduspunkti attiecīgi ir K un M. Aprēķināt AD garumu, ja $AK = 6$, $AM = 3$ un $\sphericalangle KAM = 60°$.

Atrisinājums. Novelkam KM, BD un ar E apzīmējam BD un AM krustpunktu (skat. 57. att.). Uz stara AM atliekam tādu punktu A', ka $A'M = AM = 3$, tad $A'AK$ ir vienādmalu trijstūris, jo tas ir vienādsānu trijstūris, kura virsotnes leņķis ir $60°$, tātad abi pamata pieleņķi arī ir $60°$. Tāpēc tā mediāna KM ir arī augstums, tātad $\sphericalangle KMA = 90°$. Pēc Pitagora teorēmas iegūstam, ka $KM = 3\sqrt{3}$.

Nogrieznis KM ir trijstūra BCD viduslīnija, tāpēc $BD = 2KM = 6\sqrt{3}$ un $\sphericalangle MEB = 90°$.

Tā kā $\sphericalangle MED = \sphericalangle AEB$ kā krustleņķi un $\sphericalangle EMD = \sphericalangle EAB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm, tad $\Delta MED \sim \Delta AEB$ pēc pazīmes $\ell\ell$ un $\frac{ME}{AE} = \frac{ED}{EB} = \frac{MD}{AB} = \frac{1}{2}$, no kā iegūstam $ED = \frac{1}{3}BD = 2\sqrt{3}$ un $AE = \frac{2}{3}AM = 2$.

Pēc Pitagora teorēmas ΔAED, iegūstam $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$.



57. att.

Piezīme. Malas KM garumu var aprēķināt arī izmantojot kosinusu teorēmu trijstūrī KAM:

$$KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2 \cdot AK \cdot AM \cdot \cos\sphericalangle KAM \qquad \Rightarrow \qquad KM = 3\sqrt{3}.$$

Pamatot, ka $\sphericalangle KMA = 90°$, var arī izmantojot Pitagora teorēmas apgriezto teorēmu, tas ir, tā kā $AK^2 + KM^2 = AM^2$, tad trijstūris KAM ir taisnleņķa.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	15	15	11	3	9	1	2	0	5	1	20
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,24								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) vienādmalu trijstūra pazīme,
2) Pitagora teorēma vai kosinusu teorēma,
3) trijstūru līdzības pazīmes.

10.3. Skaitļus a, b, c sauksim par *skaistu trijnieku*, ja tiem vienlaicīgi piemīt šādas īpašības:

- tie ir trīs pēc kārtas esoši naturāli skaitļi;
- katrs no tiem dalās ar savu ciparu summu.

Piemēram, *skaists trijnieks* ir 8, 9, 10.

a) Atrast tādu *skaistu trijnieku*, kurā mazākais skaitlis ir lielāks nekā 10.

b) Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *skaistu trijnieku*!

Atrisinājums. a) *Skaists trijnieks* ir, piemēram, 110 (dalās ar 2), 111 (dalās ar 3), 112 (dalās ar 4).

b) Aplūkosim skaitļus, ko iegūst no skaitļiem 110, 111 un 112, aiz pirmā cipara ievietojot n nuļļu grupu:

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}10; \quad 1\underbrace{0\ldots0}_{n}11; \quad 1\underbrace{0\ldots0}_{n}12$$

Iegūtie skaitļi joprojām ir secīgi. Pirmā skaitļa ciparu summa ir 2, un tas dalās ar 2. Otrā skaitļa ciparu summa ir 3, tātad tas dalās ar 3. Trešā skaitļa ciparu summa ir 4, un tas dalās ar 4, jo tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4. Tā kā n var būt jebkurš naturāls skaitlis, tad *skaistu trijnieku* ir bezgalīgi daudz.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	10	10	0	0	0	17	2	0	14	2	1	29
Vidēji iegūtais punktu skaits				6,55								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

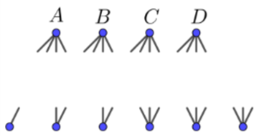
1) dalāmības pazīmes,
2) piemēra konstruēšana un vispārināšana.

10.4. Desmit šahisti katrs ar katru izspēlēja vienu šaha partiju, dažas no tām beidzās neizšķirti. Ir zināms, ka bija tieši viens šahists, kas neizšķirti nospēlēja tieši vienu partiju, divi šahisti – kas nospēlēja divas, trīs šahisti – kas nospēlēja trīs, un četri šahisti, kas neizšķirti nospēlēja tieši četras partijas. Šos pēdējos četrus šahistus (kas katrs četras partijas nospēlēja neizšķirti) sauksim par *neizšķirtu karaļiem*, bet par *karalisku neizšķirtu* sauksim partiju, kurā neizšķirtu izcīnīja divi *neizšķirtu karaļi*. Vai var apgalvot, ka tika izspēlēts **a)** vismaz viens *karaliskais neizšķirts*, **b)** *vismaz divi karaliskie neizšķirti*?

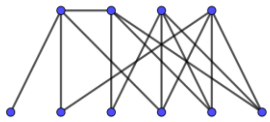
Atrisinājums. Šahistus apzīmējam ar punktiem. Ja divi šahisti spēlējuši neizšķirti viens ar otru, tad atbilstošos punktus savienojam ar līniju. Tad, atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, no katra punkta iziet tik līniju, cik parādīts 58. att.

a) No punktiem A, B, C un D (skat. 58. att.) kopā iziet 16 līniju gali, bet no sešiem atlikušajiem punktiem kopā iziet 14 līniju gali. Tātad nevar būt tā, ka punkti A, B, C un D ir savienoti tikai ar atlikušajiem sešiem punktiem un nav savienoti savā starpā. Tātad esam ieguvuši, ka no tiem šahistiem, kas neizšķirti spēlējuši tieši četras reizes, noteikti ir tādi divi, kas spēlējuši viens ar otru, tas ir, noteikti tika izspēlēts vismaz viens *karaliskais neizšķirts*.

b) Nē, skat., piemēram, 59. att.



58. att.



59. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	16	2	1	1	5	18	2	1	3	4	26
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,77								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Uzdevums ir reducējams uz grafu teoriju.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) objektu skaitīšana,
2) pretpiemēra atrašana.

10.5. Izvēlēti 12 dažādi naturāli skaitļi, neviens no tiem nepārsniedz 35. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem iespējams izvēlēties trīs atšķirīgus skaitļu pārus tā, ka visiem trīs pāriem lielākā un mazākā skaitļa starpība ir vienāda! Viens skaitlis var ietilpt arī divos pāros (vienreiz kā lielākais, otrreiz – kā mazākais).

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds 12 skaitļu komplekts, kur visas starpības starp skaitļiem atkārtojas ne vairāk kā divas reizes.

Ievērojam, ka 12 skaitļi kopā veido $12 \cdot 11 : 2 = 66$ starpības, tām iespējamas 34 dažādas vērtības: no 1 līdz 34. Ja kādu no vērtībām starpības vispār nepieņem, tad katrai no pārējām starpībām jāparādās tieši divas reizes. Tāpat redzams, ja kādas divas vērtības tiek pieņemtas tikai vienu reizi, tad visas pārējās jāpieņem tieši divas reizes. Nav iespējams, ka trīs vērtības tiek pieņemtas tikai vienu reizi, tāpat nav iespējams, ka kāda vērtība netiek pieņemta un kāda cita tiek pieņemta tikai vienu reizi.

Ievērosim, ja mēs katru no tiem (apzīmēsim ar x) aizstājam ar $36-x$, tad arī šis jauniegūtais skaitļu komplekts atbilst visām prasībām: visi skaitļi ir intervālā [1; 35] un to starpības ir tieši tās pašas. Šo simetrijas īpašību izmantosim, lai samazinātu aplūkojamo gadījumu skaitu.

Ievērojam, ka starpību

- 34 var iegūt tikai vienā veidā $34=35-1$;
- 33 var iegūt tikai 2 veidos $33=35-2=34-1$;
- 32 var iegūt tikai 3 veidos $32=35-3=34-2=33-1$;
- 31 var iegūt tikai 4 veidos $31=35-4=34-3=33-2=32-1$.

Pieņemsim, ka šādi 12 skaitļi ir atrasti.

Starpību 34 var iegūt tikai no skaitļiem 1 un 35, starpību 33 tikai no skaitļu pāriem (2; 35) un (1; 34). Tas nozīmē, ja nav izvēlēts 1 vai 35, tad mums nav neviena starpība 34 un ir lielākais viena starpība 33, kas nav iespējams. Tātad noteikti ir izvēlēti abi skaitļi 1 un 35. Ja nav izvēlēts ne 2, ne 34, tad mums ir viena starpība 34 un neviena starpība 33, kas nav iespējams. Tātad viens no skaitļiem 2 vai 34 noteikti ir izvēlēts, augstākminētās simetrijas pēc pieņemsim, ka tas ir 2. Tālāk aplūkojam iespējamos gadījumus.

1. Skaitlis 3 ir izvēlēts (kopā ar 35; 1 un 2). Tad 34 noteikti nav izvēlēts, citādi mums būtu trīs starpības 1 ($35-34=3-2=2-1=1$). Tad 33 noteikti ir izvēlēts, citādi mums būtu tikai viena starpība 34, viena 33 un viena 32 (ko var iegūt tikai 3 veidos $35-3=34-2=33-1=32$).

Ja mums ir izvēlēti skaitļi 1, 2, 3, 33, 35, tad noteikti nav izvēlēti 4 un 32, jo citādi mums būtu vairāk nekā divas starpības 1. Tas nozīmē, ka mums ir tikai viena starpība 31 (jo nav ne 2, ne 4, ne 32), kas kopā ar to, ka mums ir tikai viena starpība 33 un viena starpība 34 dod pretrunu.

2. Skaitlis 3 nav izvēlēts. Tad 34 ir izvēlēts, jo pretējā gadījumā mums būtu tikai viena starpība 32 (ja ne 3, ne 34 nav) viena 33 un viena 34. Tātad mums ir izvēlēti skaitļi 1, 2, 34, 35, kas nozīmē, ka nav ne 3, ne 33, lai nebūtu vairāk kā divas starpības 1. Tas nozīmē, ka mums jau ir tikai viena starpība 34 un tikai viena starpība 32, kas nozīmē, ka visām pārējām starpībām jābūt pieņemtām tieši divreiz. Tātad 4 un 32 noteikti ir izvēlēti, lai varētu iegūt divas starpības 31. No tā, ka mums ir izvēlēti 1, 2, 4, 32, 34, 35 (un nav 3 un 33) seko, ka mums noteikti nav izvēlēti 5, 6, 30 un 31, lai nebūtu par daudz starpību 1 vai 2. Bet tas savukārt nozīmē, ka mums nav nevienas starpības 29 (ko var iegūt tikai sešos veidos: $35-6=34-5=33-4=32-3=31-2=30-1=29$), kas kopā ar to, ka mums ir tikai viena starpība 34 dod pretrunu.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	12	34	15	14	2	1	0	3	0	0	0	4
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,52								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pierādījums no pretējā,
2) gadījumu šķirošana.

11. klase

11.1. Atrisināt nevienādību $\left|\left||x-2|-3\right|-7\right|<5$.

1. atrisinājums. Tā kā moduļa vērtība ir mazāka nekā 5, tad

$$-5<\left||x-2|-3\right|-7<5 \text{ jeb } 2<\left||x-2|-3\right|<12.$$

Iespējami divi gadījumi:

1) $2<|x-2|-3<12$ jeb $5<|x-2|<15$ un atkal iespējami divi gadījumi
   a) $5<x-2<15$ jeb $7<x<17$;
   b) $-15<x-2<-5$ jeb $-13<x<-3$;

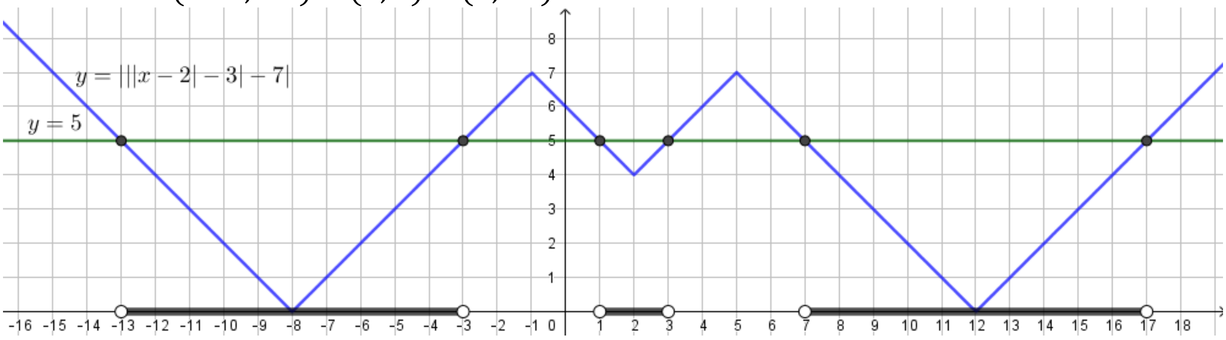
2) $-12 < |x-2| - 3 < -2$ jeb $-9 < |x-2| < 1$ un tā kā modulis ir nenegatīvs, tad $-1 < x - 2 < 1$ jeb $1 < x < 3$.

2. atrisinājums. Doto nevienādību var risināt, pakāpeniski zīmējot funkciju $y = |x-2|$, $y = |x-2| - 3$, $y = ||x-2| - 3|$, $y = ||x-2| - 3| - 7$, $y = |||x-2| - 3| - 7|$ grafikus, ievērojot, ka funkcijas

- $y = f(x) - a$, kur $a > 0$, grafiku iegūst, funkcijas $y = f(x)$ grafiku pārbīdot paralēli Oy asij par a vienībām uz leju;
- $y = |f(x)|$ grafiku iegūst, nemainot to grafika $y = f(x)$ daļu, kur $f(x) \geq 0$, un to grafika daļu, kur $f(x) < 0$, attēlojot simetriski attiecībā pret Ox asi.

Rezultātā iegūst 60. att. doto grafiku. Atbildi nolasa no grafika, atrodot krustpunktus ar taisni $y = 5$ un izvēloties tos intervālus, kur grafiks atrodas zem taisnes $y = 5$.

Līdz ar to $x \in (-13; -3) \cup (1; 3) \cup (7; 17)$.



60. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	4	4	4	4	1	1	8	3	2	2	39
Vidēji iegūtais punktu skaits			7,31									

Skaidrojums par uzdevumu

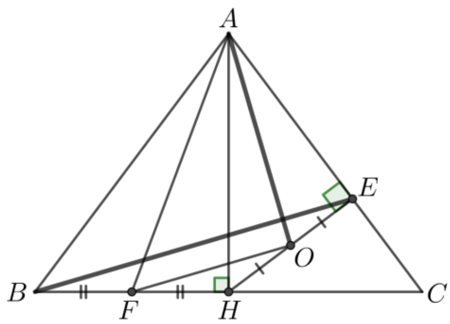
Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) nevienādību ar moduli atrisināšana,
2) gadījumu šķirošana.

11.2. Vienādsānu trijstūrī ABC no pamata BC viduspunkta H novilkts perpendikuls HE pret sānu malu AC, punkts O ir nogriežņa HE viduspunkts. Pierādīt, ka $AO \perp BE$!

Atrisinājums. Vienādsānu trijstūrī mediāna, kas vilkta no virsotnes, ir arī augstums un bisektrise. Tāpēc $AH \perp BC$ un $\sphericalangle BAH = \sphericalangle HAC$, no kā izriet, ka $\Delta BHA \sim \Delta HEA$ pēc pazīmes $\ell\ell$ (skat. 61. att.). Trijstūrī BAH novelkam mediānu AF. No sakarībām līdzīgos trijstūros (AF un AO ir atbilstošās mediānas) secinām, ka $\sphericalangle FAH = \sphericalangle OAE$ un $\frac{AF}{AH} = \frac{AO}{AE}$. Tā kā $\sphericalangle FAO = \sphericalangle FAH + \sphericalangle HAO =$ $= \sphericalangle OAE + \sphericalangle HAO = \sphericalangle HAE$, tad $\Delta FOA \sim \Delta HEA$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tātad $\sphericalangle FOA = 90°$. Bet $BE || OF$, jo FO ir ΔBHE viduslīnija. Tāpēc $BE \perp AO$.



61. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	12	16	20	0	15	3	0	1	1	0	1	5
Vidēji iegūtais punktu skaits			2,40									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūru līdzības pazīmes,
2) sakarības līdzīgos trijstūros.

11.3. Skaitļus a, b, c, d, e sauksim par *skaistu piecinieku*, ja tiem piemīt šādas īpašības:

- tie ir pieci pēc kārtas esoši naturāli skaitļi;
- katrs no tiem dalās ar savu ciparu summu.

Piemēram, *skaists piecinieks* ir 6, 7, 8, 9, 10.

a) Atrast tādu *skaistu piecinieku*, kurā mazākais skaitlis ir lielāks nekā 10.

b) Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *skaistu piecinieku*!

Atrisinājums. a) *Skaists piecinieks* ir, piemēram,

- 27027024 – ciparu summa ir 24; tā kā šis skaitlis dalās ar 3 (jo ciparu summa dalās ar 3) un 8 (jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8), tad tas dalās ar 24;
- 27027025 – ciparu summa ir 25; tā kā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 25, tad arī pats skaitlis dalās ar 25;
- 27027026 – ciparu summa ir 26 un $27027026 = 26 \cdot 10392501$;
- 27027027 – ciparu summa ir 27 un $27027027 = 27 \cdot 1001001$;
- 27027028 – ciparu summa ir 28 un $27027028 = 28 \cdot 965251$.

b) Aplūkosim skaitļus, ko iegūst no skaitļiem 27027024, 27027025, 27027026, 27027027 un 27027028, pirms pēdējiem diviem cipariem ievietojot n nuļļu grupu:

$$27027\underbrace{0\ldots0}_{n}24;\quad 27027\underbrace{0\ldots0}_{n}25;\quad 27027\underbrace{0\ldots0}_{n}26;\quad 27027\underbrace{0\ldots0}_{n}27;\quad 27027\underbrace{0\ldots0}_{n}28$$

Iegūtie skaitļi joprojām ir secīgi un tā kā tika pievienotas tikai nulles, tad ciparu summa nemainās, tas ir, ciparu summas attiecīgi ir 24, 25, 26, 27 un 28. Katru no šiem skaitļiem var uzrakstīt formā $27027 \cdot 10^{n+2} + x$, kur $x = 24, 25, 26, 27, 28$. Pamatosim, ka šie skaitļi dalās ar savu ciparu summu

Ievērojam, ka $27027 \cdot 10^{n+2} + x = 27 \cdot 1001 \cdot 10^3 \cdot 10^{n-1} + x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 10^{n-1} + x$ un ka pirmais saskaitāmais dalās ar visām iespējamām x vērtībām, tas ir, ar 24, 25, 26, 27 un 28. Tā kā abi saskaitāmie dalās ar x, tad arī pats skaitlis dalās ar x. Tā kā n var būt jebkurš naturāls skaitlis, tad *skaistu piecinieku* ir bezgalīgi daudz.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	28	38	6	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Vidēji iegūtais punktu skaits			0,39									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) dalāmības pazīmes,
2) piemēra konstruēšana un vispārināšana.

11.4. Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos

$$\begin{cases} x^3 + 4x = 5y \\ y^3 + 4y = 5z \\ z^3 + 4z = 5x \end{cases}$$

Atrisinājums. Dotās sistēmas atrisinājumi ir $(0;0;0)$; $(1;1;1)$ un $(-1;-1;-1)$. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Tā kā vienādojums ir simetrisks attiecībā pret mainīgo rotāciju, tad nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $x \geq y$ un $x \geq z$. Funkcija $f(a) = a^3 + 4a$ ir stingri augoša visā savā definīcijas apgabalā, kā divu augošu funkciju summa (a^3 un $4a$), tātad, ja $x \geq y$, tad no sistēmas pirmā un otrā vienādojuma iegūst, ka $x^3 + 4x \geq y^3 + 4y$ jeb $5y \geq 5z$, no kā izriet, ka $y \geq z$. Savukārt no $y \geq z$ tieši tādā pašā veidā, izmantojot sistēmas otro un trešo vienādojumu, iegūst, ka $z \geq x$. Tātad $x \geq y \geq z \geq x$, no kā izriet, ka $x = y = z$. Ievietojot sistēmas pirmajā vienādojumā, iegūst $x^3 + 4x = 5x$ jeb $x^3 - x = 0$, tātad $x_1 = -1, x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Pārbaude apstiprina, ka $x = y = z = -1$, $x = y = z = 0$ un $x = y = z = 1$ patiešām der kā šīs vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	25	29	9	0	0	1	0	0	1	1	5
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,68								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atrisinājumu atrašana,
2) pamatojums, ka citu atrisinājumu nav,
3) funkcijas īpašību izmantošana,
4) izteiksmju novērtēšana.

11.5. Trīs 500 litru mucās atrodas attiecīgi 100, 107 un 113 litri ūdens. Vienā gājienā atļauts jebkurā mucā M pieliet klāt no jebkuras citas mucas (kurā ir vismaz tikpat daudz ūdens kā mucā M) tik daudz ūdens, cik mucā M jau atrodas. Vai, veicot šādus gājienus, iespējams iztukšot **a)** vienu mucu, **b)** divas mucas?

Atrisinājums. a) Vienu mucu ir iespējams iztukšot, skat., piemēram, tālāk dotajā tabulā

100	107	113
100	$107 + 107 = 214$	$113 - 107 = 6$
$100 + 100 = 200$	$214 - 100 = 114$	6
200	$114 - 6 = 108$	$6 + 6 = 12$
200	$108 - 12 = 96$	$12 + 12 = 24$
$200 - 24 = 176$	96	$24 + 24 = 48$
$176 - 48 = 128$	96	$48 + 48 = 96$
128	0	192

b) Pamatosim, ka divas mucas nav iespējams iztukšot. Ievērojam, ka kopējais ūdens daudzums ir 320 litru, tātad pēdējā gājiena rezultātam (ar precizitāti līdz mucu sakārtojumam), jābūt (320; 0; 0), tātad beigās katrā mucā esošajam ūdens daudzums būtu jādalās ar 5.

Aplūkosim patvaļīgu soli, pēc kura ūdens daudzums visās mucās dalās ar 5, simetrijas pēc pieņemsim, ka šajā solī no pirmās mucas ūdens tika pārliets otrajā, tātad tas bija $(x;\ y;\ z) \to (x - y; 2y;\ z)$ un visi trīs skaitļi $x - y$, $2y$ un z dalās ar 5. No tā, ka $2y$ dalās ar 5, izriet, ka y dalās ar 5 (jo 2 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi) un no tā, ka $x - y$ dalās ar 5 un y dalās ar 5, izriet, ka $(x - y) + y = x$ dalās ar 5. Tātad gan x, gan y, gan z dalās ar 5, tātad, ja pēc kāda soļa visās mucās ūdens daudzums dalās ar 5, tad arī pirms šī soļa tas ir dalījies ar 5. Tā kā sākotnējais ūdens daudzums ne visās mucās dalās ar 5, tad skaidrs, ka no tā nav iespējams iegūt situāciju, kad visās mucās ūdens daudzums dalās ar 5.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	9	19	6	1	0	10	21	3	2	1	0	2
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,28								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) piemērs, kā iztukšot vienu mucu,
2) pamatojums, ka divas mucas nevar iztukšot,
3) invariantu metode.

12. klase

12.1. Apzīmēsim $a = 2018^{\lg(\lg 2018)}$, $b = (\lg 2018)^{\lg 2018}$ un $c = (\lg(\lg 2018))^{2018}$. Aprēķināt izteiksmes $\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$ vērtību!

Atrisinājums. Izmantojot logaritmu īpašību $m^{\log_m t} = t$, iegūstam, ka

$$x^{\lg y} = 10^{\lg(y^{\lg x})} = 10^{\lg x \lg y} = y^{\lg x},$$

tāpēc $a = 2018^{\lg(\lg 2018)} = \lg 2018^{\lg 2018} = b$ (šeit $x = 2018$ un $y = \lg 2018$). Līdz ar to

$$\boldsymbol{\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = 0 + \frac{a-c}{a} + \frac{c-a}{a} = 0}.$$

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	19	16	3	0	0	0	0	1	0	0	0	13
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,21								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

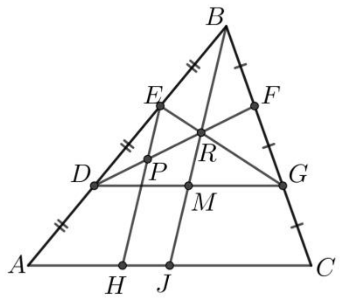
1) logaritmu īpašības,
2) ekvivalentu pārveidojumu veikšana.

12.2. Uz trijstūra ABC malas AB atlikti punkti D un E tā, ka $AD = DE = EB$, uz malas BC – punkti F un G tā, ka $BF = FG = GC$, uz malas AC – punkts H tā, ka $2AH = CH$. Nogrieznis DF krusto nogriežņus EH un EG attiecīgi punktos P un R. Pierādīt, ka $DP = PR = RF$.

Atrisinājums. Nogriežņi DF un GE ir trijstūra BDG mediānas (skat. 62. att.). Mediānas krustojoties tiek sadalītas attiecībā 2:1, skaitot no virsotnes, tāpēc $DR = 2RF$.

Novelkam BR, tas krusto DG punktā M un AC punktā J. Ievērojam, ka BM ir trijstūra DBG mediāna (jo iet caur mediānu krustpunktu). Tā kā trijstūri BDG un BAC ir līdzīgi pēc pazīmes $m\ell m$, tad $\frac{BA}{BD} = \frac{AC}{DG}$ un $\sphericalangle BDG = \sphericalangle BAC$, tātad $DG||AC$. Tā kā trijstūri BDM un BAJ ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, tātad $\frac{AJ}{DM} = \frac{BA}{BD} = \frac{AC}{GD}$, no kā varam secināt, ka $\frac{AJ}{AC} = \frac{DM}{GD} = \frac{1}{2}$, tātad BJ ir trijstūra BAC mediāna. Tā kā trijstūri AEH un ABJ ir līdzīgi pēc pazīmes $m\ell m$, tad $\sphericalangle AEH = \sphericalangle ABJ$ un tātad $EH||BJ$. Pēc Talesa teorēmas secinām, ka $DP = PR$.

Tā kā $DR = 2RF$ un $DP = PR$, tad $DP = PR = RF$.



62. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	4	8	3	12	5	2	0	2	1	1	1	13
Vidēji iegūtais punktu skaits			4,50									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) mediānu īpašība,
2) trijstūru līdzības pazīmes,
3) mediānas pazīme,
4) Talesa teorēma.

12.3. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

Atrisinājums. Der skaitļu pāri $(0; 1)$ un $(0; -1)$. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav.

Apzīmējam $x^3 = a$, tad $y^4 = a^2 + 3a + 1$.

Ja $a \geq 1$, tad $a^2 + 2a + 1 < a^2 + 3a + 1 < a^2 + 4a + 4$, tātad arī $(a + 1)^2 < y^4 < (a + 2)^2$, redzams, ka y^4 (kas ir naturāla skaitļa kvadrāts) atrodas starp divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu kvadrātiem – pretruna.

Ja $a \leq -4$, tad $a^2 + 4a + 4 < a^2 + 3a + 1 < a^2 + 2a + 1$, tātad arī $(a + 2)^2 < y^4 < (a + 1)^2$ un, tieši tāpat kā iepriekš, iegūstam pretrunu, ka y^4 atrodas starp diviem pēc kārtas esošu skaitļu kvadrātiem.

Tātad $-3 \leq a \leq 0$. Tā kā $a = x^3$, tad $a = 0$ vai $a = -1$.

Ja $a = 0$, tad $x = 0$, no kā izriet, ka $y = \pm 1$. Ja $a = -1$, tad $x = -1$, un iegūstam, ka $y^4 = -1$, kam atrisinājuma nav. Tātad dotajam vienādojumam ir tikai divi atrisinājumi $(0; 1)$ un $(0; -1)$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	9	10	21	4	5	0	0	0	0	0	1
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,88									

Skaidrojums par uzdevumu

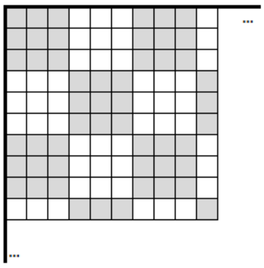
Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

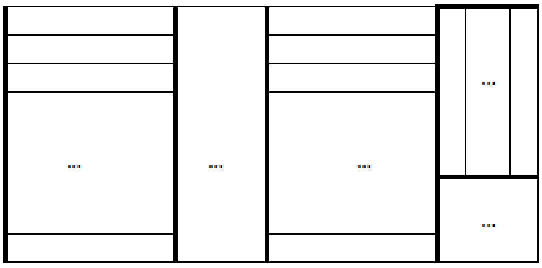
1) atrisinājumu atrašana,
2) pamatojums, ka citu atrisinājumu nav,
3) izteiksmju novērtēšana,
4) gadījumu šķirošana.

12.4. Taisnstūris, kura izmēri ir $n \times m$ rūtiņas, griežot par rūtiņu līnijām, sagriezts 1×6 rūtiņas lielos taisnstūros. Pierādīt, ka n vai m dalās ar 6.

Atrisinājums. Sākotnējo rūtiņu laukumu šaha veidā izkrāsosim 3×3 rūtiņas lielos melnos un baltos kvadrātos (skat. 63. att.).



63. att.



64. att.

Katrs 1×6 rūtiņu taisnstūris, neatkarīgi no novietojuma laukumā, satur tieši trīs melnas un trīs baltas rūtiņas. Tātad visi šādi taisnstūri kopā satur vienādu skaitu melno un balto rūtiņu.

Pamatosim, ja ne n, ne m nedalās ar 6, tad taisnstūrī $n \times m$ melno un balto rūtiņu skaits nav vienāds, tas ir, šādu taisnstūri nevar sagriezt taisnstūros 1×6 rūtiņas. Sadalām taisnstūri slejās, kuru platums ir 6 rūtiņas (skat. 64. att.), tajās melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Labajā pusē noteikti atliek sleja, kuras platums ir mazāks nekā 6 rūtiņas. Šo sleju sadalām joslās, kuru augstums ir 6 rūtiņas, tajās melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Labā apakšējā stūrī paliek taisnstūris, kura augstums ir mazāks nekā 6 rūtiņas. Līdz ar to nesadalīts paliek taisnstūris $a \times b$, kura malu garumi var būt no 1 līdz 5 rūtiņām. Tā kā taisnstūris ir sagriezts taisnstūros 1×6, tad $a \cdot b$ dalās ar 6 un iespējami divi gadījumi 2×3 vai 4×3. Nevienā no šiem abiem taisnstūriem melno un balto rūtiņu skaits nav vienāds (skat. 65. att.). Tātad sākotnējā taisnstūrī melno un balto rūtiņu skaits nav vienāds un to nevar sadalīt taisnstūros 1×6 rūtiņas.

x	x	x
x	x	x

x	x	x	o
x	x	x	o
x	x	x	o

65. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	16	18	8	0	1	0	0	1	1	1	4
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,04								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatoriskā ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) invariantu metode – krāsošana,
2) vispārīgs pierādījums, ka prasītais izpildās.

12.5. Trīs mucās attiecīgi ir a, b un c litri ūdens, kur a, b, c ir naturāli skaitļi. Katras mucas tilpums ir lielāks nekā $a + b + c$ litri. Vienā gājienā atļauts jebkurā mucā M pieliet klāt no jebkuras citas mucas (kurā ir vismaz tikpat daudz ūdens kā mucā M) tik daudz ūdens, cik mucā M jau atrodas. Pierādīt, ka, veicot šādus gājienus, vienmēr iespējams iztukšot vienu no mucām!

Atrisinājums. Apskatām mucu, kurā ir vismazāk ūdens. Parādīsim, kā kādā no pārējām mucām iegūt mazāk ūdens nekā šajā mucā. Tad skaidrs, ka, atkārtojot šo procesu, agrāk vai vēlāk kāda no mucām būs tukša.

Apzīmējam mucas ar A (sākumā tajā ir a litri), B (b litri) un C (c litri) un, nezaudējot vispārīgumu, pieņemam, ka $0 < a \leq b \leq c$. Aplūkojam mucas A un B.

Izsakām $b = a \cdot x + y$, kur $0 \leq y < a$, bet x izsakām binārā formā:

$$x = x_0 + 2x_1 + 2^2x_2 + 2^3x_3 + \cdots + 2^k x_k,$$

kur x_i ir vai nu 0, vai 1 visiem $i = 0, 1, \ldots, k$.

Veiksim pārliešanas uz mucu A, izdarot $k + 1$ gājienu (gājienus numurēsim no 0 līdz k):

- ja $x_i = 1$, tad i-tajā gājienā pārlejam ūdeni no mucas B mucā A;
- ja $x_i = 0$, tad i-tajā gājienā pārlejam ūdeni no mucas C mucā A.

Katrā gājienā ūdens daudzums mucā A dubultojas un i-tajā gājienā mucā tiek ielieti $2^i a$ litri ūdens. Tā kā katram naturālam m izpildās nevienādība $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{m-1}=\frac{1\cdot(2^m-1)}{2-1}<2^m$, tad mucā B pietiks ūdens, lai veiktu kārtējo gājienu neatkarīgi no tā, cik reizes veikta liešana no C uz A.

Pat, ja no B uz A būs jāveic tikai viena – pēdējā liešana, no C pārlietais ūdens daudzums nepārsniedz $a(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{k-1})<a2^k\leq b\leq c$, tātad mucā C pietiks ūdens, lai veiktu nepieciešamos gājienus.

Ar aprakstītajiem gājieniem tiks panākts, ka mucā B paliek y litri ūdens, bet, tā kā $y<a$, tad tagad mucā B ir mazāk ūdens nekā sākotnēji bija mucā A (tas ir, tagad mucā B ir vismazākais ūdens daudzums). Atkārtojot līdzīgas gājienu virknes, panāksim, ka kādā no mucām ūdens vairs nebūs.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	15	35	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Vidēji iegūtais punktu skaits				0,05								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) vispārīga algoritma izstrāde,
2) skaitļa pieraksts binārā formā,
3) ģeometriskās progresijas pirmo n locekļu summas aprēķināšanas formula.

9. klase

9.1. Lineāra funkcija $y = (m^2 - 3m)x + 4m - 4$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 2. Atrodi m vērtības un noskaidro, vai atbilstošā funkcija ir augoša vai dilstoša!

Atrisinājums. Dotā funkcija krusto x asi punktā $(2; 0)$, ievietojot šīs vērtības dotajā funkcijā, iegūstam vienādojumu $0 = (m^2 - 3m) \cdot 2 + 4m - 4$ jeb $m^2 - m - 2 = 0$, kura saknes ir $m_1 = -1$ un $m_2 = 2$. Tātad iespējami divi gadījumi:

- ja $m = -1$, tad dotā funkcija ir $y = 4x - 8$ un tā ir augoša, jo koeficients pie x ir pozitīvs;
- ja $m = 2$, tad dotā funkcija ir $y = -2x + 4$ un tā ir dilstoša, jo koeficients pie x ir negatīvs.

Vērtēšanas kritēriji

Iegūst funkcijas grafika krustpunkta ar x asi koordinātas	1
Iegūst kvadrātvienādojumu $m^2 - m - 2 = 0$	1
Iegūst, ka $m_1 = -1$ un $m_2 = 2$	2
Vērtībai $m_1 = -1$ iegūst atbilstošo funkciju $y = 4x - 8$ un pamato, ka tā ir augoša	3
Vērtībai $m_1 = 2$ iegūst atbilstošo funkciju $y = -2x + 4$ un pamato, ka tā ir dilstoša	3

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	11	166	60	26	29	106	17	22	30	17	15	153
Vidēji iegūtais punktu skaits			4,45									

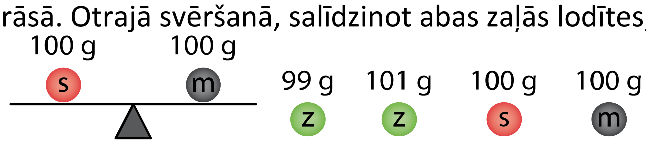
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.
Uzdevums par lineāru funkciju ar parametru.
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:
1) izpratne par parametru,
2) funkcijas grafika un x ass krustpunkta koordināšu aprēķināšana,
3) lineāras funkcijas īpašības.

9.2. Dotas divas melnas, divas sarkanas un divas zaļas lodītes. Vienas lodītes masa ir 99 g, bet tādas pašas krāsas otras lodītes masa ir 101 g. Pārējās četras lodītes katra sver 100 g. Kā, lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām atrast vieglāko lodīti?

1. atrisinājums. Pirmajā svēršanā salīdzinām vienas sarkanās un vienas melnās lodītes masu.

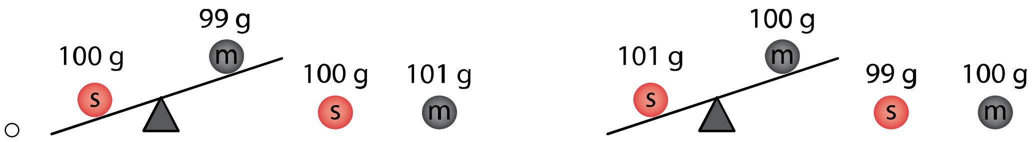
1) Ja svari ir līdzsvarā (skat. 66. att.), tad melnās un sarkanās lodītes katra sver 100 g, tātad vieglākā lodīte ir zaļā krāsā. Otrajā svēršanā, salīdzinot abas zaļās lodītes, atrodam vieglāko.



66. att.

2) Apskatām gadījumu, kad svari nav līdzsvarā. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka sarkanā lodīte ir smagāka nekā melnā. Tad iespējami divi gadījumi (skat. 67. att.):
   - sarkanā lodīte sver 100 g un melnā – 99 g;
   - sarkanā lodīte sver 101 g un melnā – 100 g.

   Tātad vieglākā lodīte ir vai nu tā, kas atrodas uz vieglākā svaru kausa, vai otra no sarkanajām. Otrajā svēršanā salīdzinot šīs abas lodītes (to, kas atrodas uz vieglākā svaru kausa un nesvērto sarkano lodīti), atrodam vieglāko. (Piezīme. Otrajā svēršanā var salīdzināt arī to lodīti, kas atrodas uz vieglākā svaru kausa ar kādu no zaļajām.)



67. att.

2. atrisinājums. Pirmajā svēršanā katrā kausā liekam no katras krāsas pa vienai lodītei (katrā svaru kausā ir 3 lodītes). Svari noteikti nebūs līdzsvarā, jo viens no kausiem saturēs vieglo lodīti, bet otrs saturēs smago lodīti. Tagad atliek tikai uzzināt, kura no lodītēm vieglajā kausā ir tā, kas sver 99 g. Otrajā svēršanā salīdzinām jebkuras divas lodītes no vieglā kausa:

- ja svari ir līdzsvarā, tad abas lodītes sver 100 g un tā, kura netika svērta, ir meklētā lodīte, kas sver 99 g;
- ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākais kauss ir tas, kurš satur meklēto lodīti.

3. atrisinājums. Pirmajā svēršanā vienā kausā ieliekam abas zaļās lodītes un otrā ieliekam vienu melnu un vienu sarkanu lodīti. Jāapskata trīs gadījumi.

1) Ja svari ir līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka zaļās lodītes ir tās, kuru masas nav 100 g. Otrajā svēršanā salīdzinām zaļās lodītes, lai atrastu vieglāko.
2) Ja kauss ar zaļajām lodītēm ir smagāks, tad lodīte, kuras masa ir 99 g atrodas vieglākajā kausā un ir vai nu sarkana, vai melna. Otrajā svēršanā salīdzinām abas melnās lodītes:
   - ja svari ir līdzsvarā, tad sarkanā lodīte, ko izmantojām pirmajā svēršanā, sver 99 g;
   - ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākā melnā lodīte sver 99 g.
3) Ja kauss ar melno un sarkano lodīti ir smagāks, tad tajā atrodas lodīte, kas sver 101 g. Otrajā svēršanā salīdzinām abas melnās lodītes:
   - ja svari ir līdzsvarā, tad tā sarkanā lodīte, ko neizmantojām pirmajā svēršanā, sver 99 g;
   - ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākajā kausā atrodas vieglākā melnā lodīte, kas sver 99 g.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Aprakstīts vai ilustrēts gadījums, kad uz katra svaru kausa atrodas pa vienai lodītei dažādās krāsās, un svari ir līdzsvarā	4
Aprakstīts vai ilustrēts gadījums, kad uz katra svaru kausa atrodas pa vienai lodītei dažādās krāsās, un svari nav līdzsvarā	6
2. atrisinājums	
Aprakstīta vai ilustrēta pirmā svēršana, kad uz katra svaru kausa atrodas pa vienai lodītei no katras krāsas, un pamatots, ka svari noteikti nav līdzsvarā	4
Aprakstīta vai ilustrēta otrā svēršana, kurā tiek salīdzinātas jebkuras divas lodītes no vieglā kausa	6
3. risinājums	
Uzrakstīts vai ilustrēts, ka vienā svaru kausā ieliek divas vienas krāsas lodītes, bet otrā – divas dažādu krāsu lodītes	1
Aprakstīts vai ilustrēts gadījums, kad svari ir līdzsvarā un aprakstīta otrā svēršana, kā atrast vieglāko lodīti	3
Aprakstīts vai ilustrēts gadījums, kad kauss ar divām vienādas krāsas lodītēm ir smagāks un aprakstīta otrā svēršana, kā atrast vieglāko lodīti	3
Aprakstīts vai ilustrēts gadījums, kad kauss ar divām vienādas krāsas lodītēm ir vieglāks un aprakstīta otrā svēršana, kā atrast vieglāko lodīti	3
Apskatīti tikai daži speciālgadījumi vai izmantotas vairāk nekā divas svēršanas	Ne vairāk kā 4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	0	35	28	30	14	40	12	5	16	22	22	428
Vidēji iegūtais punktu skaits				7,90								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

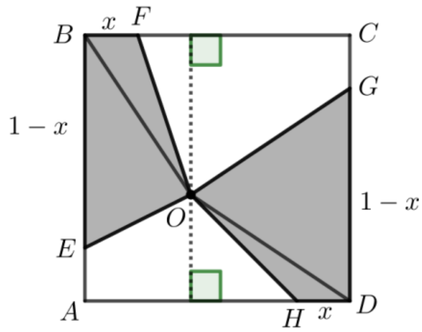
Uzdevums ir standartuzdevums par svēršanu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par sviru svariem,
2) algoritma izveidošana un visu gadījumu apskatīšana.

9.3. Uz kvadrāta $ABCD$ malām AB, BC, CD un DA attiecīgi atzīmēti punkti E, F, G, H tā, ka $AE = BF = CG = DH$. Kvadrāta iekšpusē atlikts patvaļīgs punkts O. Pierādīt, ka $S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{BFOE} + S_{DHOG}$.

1. atrisinājums. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka kvadrāta malas garums ir 1. Apzīmējam $AE = BF = CG = DH = x$, tad $DG = BE = 1 - x$. Novelkam nogriežņus OB un OD (skat. 68. att.).



68. att.

Ievērojam, ka no punkta O ir novilkti divi perpendikuli attiecīgi pret kvadrāta paralēlajām malām BC un AD, tātad šo perpendikulu (apzīmējam attiecīgi ar h_{BC} un h_{AD}) summa ir attālums starp paralēlajām malām, no kā secinām, ka $h_{BC} + h_{AD} = 1$. Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a$, iegūstam

$$S_{OBF} + S_{OHD} = \frac{1}{2}BF \cdot h_{BF} + \frac{1}{2}HD \cdot h_{HD} = \frac{1}{2}x \cdot (h_{BF} + h_{HD}) = \frac{1}{2}x \cdot 1 = \frac{1}{2}x.$$

Līdzīgi aprēķinām, ka $S_{OBE} + S_{ODG} = \frac{1}{2}(1 - x)$.

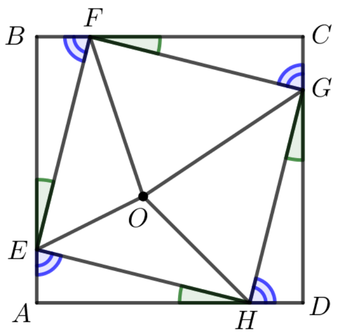
Tātad

$$S_{BFOE} + S_{DHOG} = S_{OBF} + S_{OHD} + S_{OBE} + S_{ODG} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1 - x) = \frac{1}{2};$$

$$S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{ABCD} - (S_{BFOE} + S_{DHOG}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{BFOE} + S_{DHOG}$.

2. atrisinājums. Novelkam nogriežņus EF, FG, GH un HE (skat. 69. att.). Trijstūri HAE, EBF, FCG un GDH ir vienādi pēc pazīmes $m\ell m$ un to laukumi arī ir vienādi, tātad pietiek pierādīt, ka $S_{EOF} + S_{GOH} = S_{FOG} + S_{HOE}$.



69. att.

Tā kā trijstūri HAE, EBF, FCG un GDH ir vienādi taisnleņķa trijstūri, tad $EF = FG = GH = HE = a$ un divu trijstūra šauro leņķu summa ir 90°, tas ir, viens no tiem ir α, bet otrs ir $(90° - \alpha)$. Tāpēc

$$\sphericalangle HEF = \sphericalangle EFG = \sphericalangle FGH = \sphericalangle GHE = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°.$$

Līdz ar to četrstūris $EFGH$ ir kvadrāts.

Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a$, iegūstam, ka

$$S_{EOF} + S_{GOH} = \frac{1}{2}EF \cdot h_{EF} + \frac{1}{2}GH \cdot h_{GH} = \frac{1}{2}a(h_{EF} + h_{GH}) = \frac{1}{2}a^2.$$

Līdzīgi iegūstam, ka $S_{FOG} + S_{HOE} = \frac{1}{2}a^2$. Tātad esam pierādījuši, ka $S_{EOF} + S_{GOH} = S_{FOG} + S_{HOE}$, un līdz ar to arī $S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{BFOE} + S_{DHOG}$.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Uzdevumā minētie četrstūri sadalīti trijstūros (piem., novilkti nogriežņi OB un OD v.tml.)	1
Secināts, ka no punkta O pret kvadrāta paralēlajām malām novilkto divu perpendikulu summa ir vienāda ar kvadrāta malas garumu	2
Ideja, ka var izmantot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a$	1
Aprēķināti nepieciešamo trijstūru laukumi, lai iegūtu uzdevumā minēto četrstūru laukumus	6
2. atrisinājums	
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Novilkti nogriežņi EF, FG, GH un HE	1
Pamatots, ka trijstūri HAE, EBF, FCG un GDH ir vienādi	1
Pamatots, ka četrstūris $EFGH$ ir kvadrāts	2
Ideja, ka var izmantot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a$	1
Aprēķināti nepieciešamo trijstūru laukumi, lai iegūtu uzdevumā minēto četrstūru laukumus	5

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	243	116	76	40	35	21	8	7	15	33	55
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,62								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas,
2) figūru laukumu izteikšana.

9.4. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām. Rindas sanumurētas no lejas uz augšu ar skaitļiem $1;\ 2;\ \ldots;\ n$; tāpat sanumurētas kolonnas no kreisās uz labo pusi. Katrā rūtiņā ierakstīts vai nu $(+1)$, vai (-1). Ja rindas un kolonnas numuri ir vienādi, tad visu šajā rindā ierakstīto skaitļu reizinājums atšķiras no visu šajā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājuma. Vai tas ir iespējams, ja **a)** $n = 7$, **b)** $n = 8$?

Atrisinājums. a) Nē, nav iespējams. Ievērojam, ka rindā vai kolonnā visu ierakstīto skaitļu reizinājums var būt tikai $(+1)$ vai (-1). Apzīmēsim rindās ierakstīto skaitļu reizinājumus attiecīgi ar $r_1, r_2, \ldots, r_7$ un kolonnās ierakstīto skaitļu reizinājumus attiecīgi ar $k_1, k_2, \ldots, k_7$. No dotā secinām, ka i-tajā rindā un i-tajā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājumi ir attiecīgi $(+1)$ un (-1), vai otrādi. Līdz ar to $r_1 \cdot k_1 = r_2 \cdot k_2 = \ldots = r_7 \cdot k_7 = -1$, tātad

$$(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_7) \cdot (k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_7) = (r_1 \cdot k_1)(r_2 \cdot k_2) \ldots (r_7 \cdot k_7) = -1.$$

Taču šis reizinājums ir visu tabulā ierakstīto skaitļu reizinājuma kvadrāts – pretruna, jo skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs. Tātad kvadrātā 7×7 nav iespējams ierakstīt skaitļus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

b) Jā, ir iespējams, noteikumiem atbilstošu skaitļu izvietojumu skat., piemēram, 70. att., kur tukšajās rūtiņās ierakstīts $(+1)$.

8.	-1							
7.								
6.			-1					
5.								
4.					-1			
3.								
2.							-1	
1.								
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

70. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par a) gadījumu (kopā 5 punkti)	
Uzrakstīts, ka prasītais nav iespējams	1
Pamatots, ka skaitļus nevar ierakstīt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem	4
Par dažiem piemēriem, kuros parādīts, ka kvadrātā 7×7 skaitļus nevar ierakstīt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem	Ne vairāk kā 1
Par b) gadījumu (kopā 5 punkti)	
Uzrakstīts, ka prasītais ir iespējams	1
Parādīts pareizs skaitļu izvietojums kvadrātā 8×8	4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	14	206	92	52	12	4	35	116	74	13	6	28
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,26								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana, ja uzdevumā prasītais ir iespējams,
2) vispārīgs pierādījums, ja uzdevumā prasītais nav iespējams,
3) objektu skaitīšana divos dažādos veidos.

9.5. Kāds mazākais ciparu skaits jāpieraksta ciparu virknes 3456 beigās, lai iegūtu skaitli, kas dalās ar 2019?

1. atrisinājums. Mazākais ciparu skaits, kas jāpieraksta ciparu virknes beigās, ir trīs. Piemēram, skaitlis 3456528 dalās ar 2019 ($3456528 = 2019 \cdot 1712$).

Pierādīsim, ka mazāk kā trīs ciparus nevar pierakstīt dotās ciparu virknes beigās, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi. Skaitlis 3456 nedalās ar 2019, tāpēc dotās virknes beigās ir jāpieraksta vismaz viens cipars.

Ievērojam, ka $17 \cdot 2019 = 34323 < \overline{3456x}$ un $18 \cdot 2019 = 36342 > \overline{3456x}$, kur x – cipars. Līdz ar to ar viena cipara pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Līdzīgi $171 \cdot 2019 = 345249 < \overline{3456xy}$ un $172 \cdot 2019 = 347268 > \overline{3456xy}$, kur x un y – cipari. Līdz ar to ar divu ciparu pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Tātad esam pierādījuši, ka jāpievieno vismaz trīs cipari.

2. atrisinājums. Mazākais ciparu skaits, kas jāpieraksta ciparu virknes beigās, ir trīs. Piemēram, skaitlis 3456528 dalās ar 2019 ($3456528 = 2019 \cdot 1712$).

Pierādīsim, ka mazāk kā trīs ciparus nevar pierakstīt dotās ciparu virknes beigās, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi. Skaitlis 3456 nedalās ar 2019, tāpēc dotās virknes beigās ir jāpieraksta vismaz viens cipars.

Ievērojam, ka $\overline{3456x} = 34560 + x = 17 \cdot 2019 + 237 + x$, kur x – cipars. Tā kā $17 \cdot 2019$ dalās ar 2019, tad, lai $\overline{3456x}$ dalītos ar 2019, arī $(237 + x)$ jādalās ar 2019, bet tas nav iespējams, jo x ir cipars. Līdz ar to ar viena cipara pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Līdzīgi apskatām skaitli $\overline{3456xy} = 345600 + \overline{xy} = 171 \cdot 2019 + 351 + \overline{xy}$, kur x un y – cipari. Tā kā $171 \cdot 2019$ dalās ar 2019, tad, lai $\overline{3456xy}$ dalītos ar 2019, arī $(351 + \overline{xy})$ jādalās ar 2019, bet tas nav iespējams, jo $\overline{xy}$ ir divciparu skaitlis. Līdz ar to ar divu ciparu pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Piezīme. Atrast meklēto skaitli palīdz līdzīgi spriedumi, tas ir, $3456000 = 1711 \cdot 2019 + 1491$ un $1491 + 528 = 2019$.

Vērtēšanas kritēriji

Parādīts pareizs piemērs, kur dotajai ciparu virknei beigās pievienoti trīs cipari (2 punkti), un pamatots, ka iegūtais skaitlis dalās ar 2019 (2 punkti)	4
Pamatots, ka ar viena cipara pievienošanu nepietiek	3
Pamatots, ka ar divu ciparu pievienošanu nepietiek	3

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	26	357	42	31	18	87	13	19	11	12	7	29
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,93									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) skaitļa pieraksts,
2) reizināšana un dalīšana.

10.1. Kvadrātfunkcija $y = x^2 + (m^2 + 3m)x + m - 1$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 1. Kāda var būt m vērtība? Atrast otru parabolas krustpunktu ar x asi!

Atrisinājums. Dotā funkcija krusto x asi punktā $(1; 0)$, līdz ar to, ievietojot šīs vērtības dotajā funkcijā, iegūstam vienādojumu $0 = 1 + m^2 + 3m + m - 1$ jeb $m^2 + 4m = 0$, kura saknes ir $m_1 = 0$ un $m_2 = -4$. Tātad iespējami divi gadījumi:

- ja $m = 0$, tad dotā funkcija ir $y = x^2 - 1$ un tās otrs krustpunkts ar x asi ir $(-1; 0)$;
- ja $m = -4$, tad dotā funkcija ir $y = x^2 + 4x - 5$ un tās otrs krustpunkts ar x asi ir $(-5; 0)$.

Vērtēšanas kritēriji

Iegūst funkcijas grafika krustpunkta ar x asi koordinātas	1
Iegūst kvadrātvienādojumu $m^2 + 4m = 0$	1
Iegūst, ka $m_1 = 0$ un $m_2 = -4$	2
Vērtībai $m_1 = 0$ iegūst atbilstošo funkciju $y = x^2 - 1$ un atrod otru krustpunktu ar x asi	3
Vērtībai $m_1 = -4$ iegūst atbilstošo funkciju $y = x^2 + 4x - 5$ un atrod otru krustpunktu ar x asi	3

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	62	27	14	22	31	27	55	53	116	17	153
Vidēji iegūtais punktu skaits				6,40								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.
Uzdevums par kvadrātfunkciju ar parametru.
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par parametru,
2) funkcijas grafika un x ass krustpunkta koordināšu aprēķināšana,
3) kvadrātfunkcijas īpašības.

10.2. Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Trim no tām masa katrai ir 50 g, bet pārējām trim – katrai 51 g. Kā, lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām atrast vienu monētu, kuras masa ir 51 g?

1. atrisinājums. Pirmajā svēršanā uz katra svaru kausa uzliekam pa 3 monētām. Iespējami divi gadījumi:

(A) uz viena svaru kausa ir trīs smagākās (masa 51 g) monētas, bet uz otra – trīs vieglākās (masa 50 g) monētas; (B) uz viena svaru kausa ir divas smagākās un viena vieglākā monēta, bet uz otra – viena smagākā un divas vieglākās monētas (skat. 71. att.).

Abos gadījumos viens svaru kauss nosveras uz leju. Ņemam tās trīs monētas, kas atrodas uz tā svaru kausa, kas nosvērās uz leju. Uzliekam divas no šīm trīs monētām pa vienai uz katra svaru kausa.

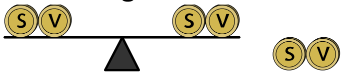
- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad uz abiem svaru kausiem uzliktas smagākās monētas – prasītais izpildīts, esam atraduši pat divas monētas, kuru masa ir 51 g.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad smagākā monēta atrodas uz tā svaru kausa, kas nosveras uz leju – prasītais izpildīts, esam atraduši monētu, kuras masa ir 51 g.

Tātad, izmantojot divas svēršanas, ir atrasta vismaz viena monēta, kuras masa ir 51 g, un prasītais ir izpildīts.

71. att.

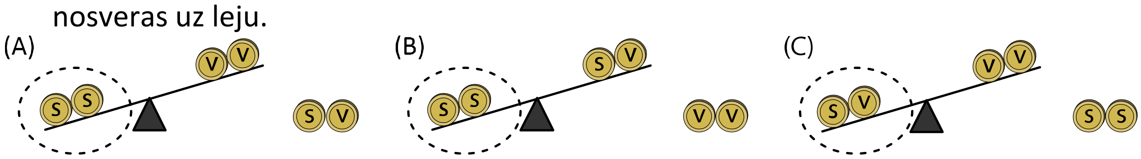
2. atrisinājums. Pirmajā svēršanā uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad uz katra svaru kausa uzlikts pa vienai smagajai (51 g) monētai (skat. 72. att.). Otrajā svēršanā izvēlamies divas monētas, kas atrodas uz viena svaru kausa un salīdzinām savā starpā, lai atrastu smagāko monētu.



72. att.

- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad iespējami trīs gadījumi (skat. 73. att.):
  (A) uz smagākā svaru kausa uzliktas divas smagās monētas, bet uz otra kausa – divas vieglās;
  (B) uz smagākā svaru kausa uzliktas divas smagās monētas, bet uz otra kausa viena smagā un viena vieglā;
  (C) uz smagākā svaru kausa uzlikta viena smagā monēta un viena vieglā, bet uz otra svaru kausa – divas vieglās monētas.
  Otrajā svēršanā izvēlamies divas monētas, kas atrodas uz smagākā svaru kausa, un salīdzinām savā starpā (no tām vismaz viena ir monēta, kuras masa ir 51 g):
  - ja svari ir līdzsvarā, tad esam atraduši divas monētas, kuru masa ir 51 g;
  - ja svari nav līdzsvarā, tad smagākā (51 g) monēta ir tā, kas atrodas uz svaru kausa, kas nosveras uz leju.



73. att.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Aprakstīta vai ilustrēta pirmā svēršana, kad uz katra svaru kausa atrodas pa trīs monētām un pamatots, ka svari noteikti nav līdzsvarā	4
Aprakstīta vai ilustrēta otrā svēršana, kā atrast vienu no smagākajām monētām	6
2. atrisinājums	
Aprakstīts vai ilustrēts gadījums, kur uz katra svaru kausa atrodas pa divām monētām, un svaru kausi ir līdzsvarā	4
Aprakstīts vai ilustrēts gadījums, kur uz katra svaru kausa atrodas pa divām monētām, un svaru kausi nav līdzsvarā	6
Apskatīti tikai daži speciālgadījumi vai izmantotas vairāk nekā divas svēršanas	Ne vairāk kā 4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	23	7	13	9	14	10	13	15	48	24	405
Vidēji iegūtais punktu skaits				8,60								

Skaidrojums par uzdevumu

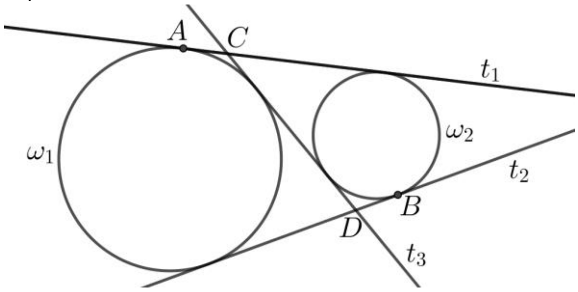
Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Uzdevums ir standartuzdevums par svēršanu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par sviru svariem,
2) algoritma izveidošana un visu gadījumu apskatīšana.

10.3. Plaknē dotas divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kurām nav kopīgu punktu un kuru rādiusi nav vienāda garuma. Novilktas trīs pieskares t_1, t_2 un t_3, kas katra pieskaras abām riņķa līnijām – abas riņķa līnijas atrodas vienā un tajā pašā t_1 pusē, vienā un tajā pašā t_2 pusē, bet katra savā t_3 pusē (skat. 74. att.). Taisne t_1 pieskaras ω_1 punktā A un krusto t_3 punktā C, taisne t_2 pieskaras ω_2 punktā B un krusto t_3 punktā D. Pierādīt, ka $AC = BD$.



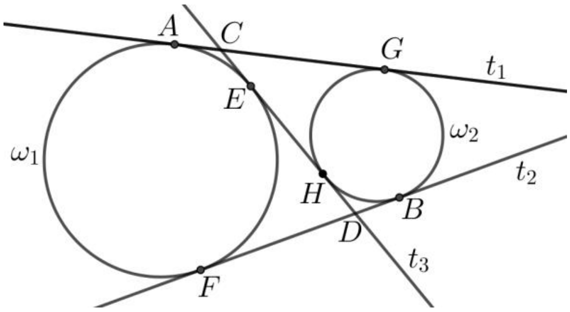
74. att.

Atrisinājums. Ar E, F, G un H apzīmējam pārējos pieskaršanās punktus (skat. 75. att.). Tā kā pieskaru, kas vilktas no viena punkta, nogriežņi ir vienādi, tad iegūstam vienādības: $AC = CE$, $CH = CG$, $DH = DB$, $DE = DF$.

Tātad

- $FB = FD + DB = DE + DB = (EH + HD) + DB = EH + 2DB$ jeb $BD = \frac{1}{2}(FB - EH)$,
- $AG = AC + CG = AC + CH = AC + (CE + EH) = 2AC + EH$ jeb $AC = \frac{1}{2}(AG - EH)$.

Ar X apzīmējam pieskaru t_1 un t_2 krustpunktu, tad $XG = XB$ un $XA = XF$. Līdz ar to $AG = FB$, no kā izriet, ka $AC = BD$.



75. att.

Vērtēšanas kritēriji

Pamana, ka $AC = CE$, $CH = CG$, $DH = DB$, $DE = DF$	2
Iegūst, ka $AG = FB$	2
Izsaka AC (3 punkti) un BD (3 punkti), izmantojot vienāda garuma nogriežņus	6
Tikai par ideju, ka jāizmanto pieskaru nogriežņu vienādība	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	25	252	80	76	21	23	11	9	5	5	1	75
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,38								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pieskaru nogriežņu īpašība,
2) nogriežņu garumu izteikšana.

10.4. Doti 2019 reāli skaitļi ar īpašību, ka jebkuru 1010 skaitļu summa ir lielāka nekā atlikušo 1009 skaitļu summa. Pierādīt, ka visi dotie skaitļi ir pozitīvi!

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka kāds no dotajiem skaitļiem x ir negatīvs vai 0, tas ir, $x \leq 0$. Atlikušos 2018 skaitļus sadalām divās grupās A un B katrā pa 1009 skaitļiem. Grupas A un B skaitļu summu attiecīgi apzīmējam ar S_A un S_B. Pēc dotā vienlaicīgi ir spēkā divas nevienādības $S_A + x > S_B$ un $S_B + x > S_A$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $S_A + S_B + 2x > S_A + S_B$.

Līdz ar to $2x > 0$ jeb $x > 0$. Esam ieguvuši pretrunu ar pieņēmumu, ka $x \leq 0$. Tātad visi dotie skaitļi ir pozitīvi.

Vērtēšanas kritēriji

Par ideju, ka jāsadala skaitļi divās pēc apjoma vienādās grupās A un B un viens atlikušais skaitlis x neietilpst nevienā no tām	1
Secina, ka $S_A + x > S_B$ un $S_B + x > S_A$	4
Pamato, ka visi $x > 0$	5
Pārbaudīts tikai viens vai daži piemēri nevis pierādīts vispārīgais gadījums	Ne vairāk kā 1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	33	314	136	26	4	6	4	5	7	10	4	34
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,42									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pierādījums no pretējā,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana.

10.5. Atrast visus pirmskaitļu pārus $(m; n)$, kuriem $20m + 18n = 2018$.

Atrisinājums. Dalām abas dotā vienādojuma puses ar 2 un pārveidojam iegūto vienādojumu:

$$10m + 9n = 1009;$$
$$1000 - 10m = 9n - 9;$$
$$10(100 - m) = 9(n - 1).$$

Ievērojam, ka iegūtās vienādības labās puses izteiksme ir pozitīva, tātad arī $(100 - m)$ jābūt pozitīvam. Tā kā 10 un 9 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $(100 - m)$ ir jādalās ar 9. Iespējamās m vērtības varētu būt 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 un 91, no kurām derīgas ir tikai 19, 37 un 73, jo tie ir pirmskaitļi. Atrodam atbilstošās n vērtības:

- ja $m = 19$, tad $10 \cdot 81 = 9(n - 1)$ jeb $n = 91$ (neder, jo nav pirmskaitlis),
- ja $m = 37$, tad $10 \cdot 63 = 9(n - 1)$ jeb $n = 71$ (pirmskaitlis),
- ja $m = 73$, tad $10 \cdot 27 = 9(n - 1)$ jeb $n = 31$ (pirmskaitlis).

Tātad dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi: $m = 37$, $n = 71$ un $m = 73$, $n = 31$.

Vērtēšanas kritēriji

Vienādojums pārveidots formā $10(100 - m) = 9(n - 1)$	2
Secina, ka $(100 - m)$ dalās ar 9	2
Atrod derīgās m vērtības, kas ir pirmskaitļi	3
Atrod atbilstošās n vērtības	3
Veikta pilnā pārlase, pārbaudot visus pirmskaitļus m, kas mazāki nekā 101	10
Uzrakstīta tikai pareiza atbilde	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	11	103	43	35	27	17	30	34	62	97	78	46
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,22								

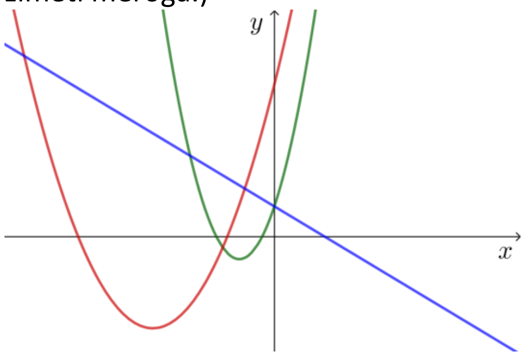
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.
Uzdevums par vienādojumiem veselos skaitļos.
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) sadalīšana reizinātājos,
2) pirmskaitļa definīcija,
3) visu derīgo gadījumu apskatīšana.

11. klase

11.1. Vai var gadīties, ka 76. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki? (Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.)



76. att.

Atrisinājums. Nē, nevar.

Funkcijas $y = bx + c$ grafiks ir taisne. Ievērojam, ka tā ir dilstoša funkcija un taisne krusto y asi punktā, kura ordinātas vērtība ir pozitīva, tad $b < 0$.

Apskatām funkciju $y = ax^2 + bx + c$. Tā kā doto parabolu zari ir vērsti uz augšu un krustpunktu ar y asi ordinātas vērtība ir pozitīva, tad $a > 0$. Aprēķinām šīs parabolas virsotnes abscisas vērtību $x_v = -\frac{b}{2a}$. Tā kā virsotne atrodas trešajā kvadrantā, tad $x_v < 0$ un, ņemot vērā, ka $a > 0$, secinām, ka $b > 0$. Esam ieguvuši pretrunu ar to, ka $b < 0$ (lineārā funkcija dilstoša), tātad 76. att. nevar būt doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki.

Vērtēšanas kritēriji

No funkcijas $y = bx + c$ un tai atbilstošā grafika iegūst, ka $b < 0$	2
No funkcijas $y = ax^2 + bx + c$ un tai atbilstošā grafika iegūst, ka $a > 0$ un pamato, ka $b > 0$	6
Secina, ka nav attēloti doto funkciju grafiki	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	4	72	44	63	27	37	22	11	14	40	34	131
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,27								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.
Uzdevums par funkciju ar parametru.
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

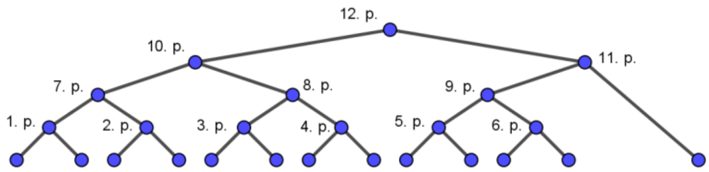
1) izpratne par parametra ietekmi uz funkcijas grafiku,
2) lineāras funkcijas un kvadrātfunkcijas īpašības.

11.2. Šaha klubā ir 13 šahisti. Visu viņu spēles prasme ir atšķirīga un partijā vienmēr uzvar spēcīgākais. **a)** Kā, izspēlējot 12 partijas, noskaidrot pašu labāko šahistu šajā klubā? **b)** Kā, izspēlējot 15 partijas, noskaidrot gan pašu labāko, gan otru labāko šahistu šajā klubā?

Atrisinājums. a) Izvēlamies divus šahistus un noskaidrojam labāko. Pirmās partijas uzvarētājs spēlē ar kādu vēl nespēlējušu šahistu. Šīs partijas uzvarētājs spēlē ar nākamo vēl nespēlējušo šahistu. Tā turpina – katras partijas labākais spēlētājs sacenšas tālāk, kamēr katrs šahists ir izspēlējis vismaz vienu partiju. Pēdējās partijas uzvarētājs ir labākais šajā klubā. Tā kā ir 12 zaudētāji, tad kopā tika izspēlētas 12 partijas.

b) Sākumā izveidojam 6 šahistu pārus (skat. 77. att.) un katrā pārī noskaidrojam labāko šahistu (6 partijas). Tad šos sešus labākos šahistus sadalām trīs pāros un katrā no šiem pāriem noskaidrojam labāko šahistu (3 partijas). Pirmos divus no atrastajiem trīs labākajiem šahistiem salīdzinām savā starpā un noskaidrojam labāko (1 partija), bet trešo no tiem salīdzinām ar to šahistu, kas līdz šim nav piedalījies nevienā šaha partijā un noskaidrojam labāko (1 partija). Visbeidzot labākie šahisti no pēdējām divām šaha partijām sacenšas savā starpā (1 partija). Tātad, izspēlējot $6+3+1+1+1=12$ šaha partijas, ir noskaidrots pats labākais šahists šajā klubā. Iepriekš parādījām, kā, izspēlējot 12 partijas, var noskaidrot uzvarētāju šajā klubā. Otrs labākais šahists meklējams tikai un vienīgi no tiem 4 šahistiem, kas spēlējuši ar uzvarētāju un tam zaudējuši. Labākais no šiem četriem šahistiem atrodams, izspēlējot vēl 3 partijas, piemēram, salīdzinām divus šahistus (1 partija), labākais no tiem spēlē ar nākamo (1 partija), labākais šahists šajā partijā spēlē ar nākamo šahistu (1 partija). Tas nozīmē, ka ar $12+3=15$ šaha partijām var atrast pašu labāko un otro labāko šahistu.

Piezīme. b) gadījumā aprakstītais plāns reizē ir atrisinājums gan a), gan b) gadījumam. Rīkojoties pēc a) gadījumā aprakstītā plāna, nav iespējams, izspēlējot 15 partijas, atrast arī otru labāko šahistu.



77. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par a) gadījumu (kopā 5 punkti)	5
Par b) gadījumu, kas reizē ir atrisinājums arī a) gadījumam (kopā 10 punkti)	
Aprakstīta vai uzzīmēta “olimpiskā shēma”, kā atrast labāko šahistu	5
Secināts, ka otrs labākais šahists meklējams tikai un vienīgi no tiem 4 šahistiem, kas spēlējuši ar uzvarētāju un tam zaudējuši.	1
Aprakstīts vai uzzīmēts, kā no šiem četriem šahistiem atrast labāko, izspēlējot 3 partijas	4
Apskatīti tikai daži speciālgadījumi vai prasītais noskaidrots, bet izmantotas vairāk partijas nekā uzdevumā prasīts	Ne vairāk kā 4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	12	7	4	5	10	153	42	25	30	21	189
Vidēji iegūtais punktu skaits				7,19								

Skaidrojums par uzdevumu

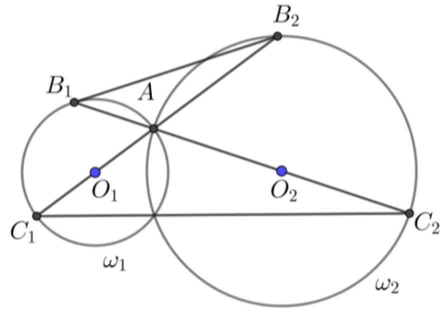
Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Uzdevums ir standartuzdevums par turnīriem/svēršanu (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par turnīru un tā norisi,
2) algoritma izveidošana un visu gadījumu apskatīšana.

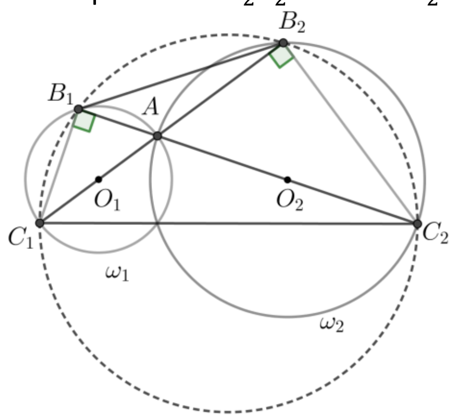
11.3. Divas riņķa līnijas ω_1 (ar centru punktā O_1) un ω_2 (ar centru punktā O_2) krustojas punktā A. Taisne O_1A krusto ω_2 punktā B_2, bet ω_1 – punktā C_1. Taisne O_2A krusto ω_1 punktā B_1, bet ω_2 – punktā C_2 (skat. 78. att.). Pierādīt, ka $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$.



78. att.

1. atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle C_1B_1A = \sphericalangle C_2B_2A = 90°$ (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz diametru) un $\sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle B_2AC_2$ (kā krustleņķi), tad $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2$ pēc pazīmes $\ell\ell$ un $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$. Tā kā $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$ un $\sphericalangle B_1AB_2 = \sphericalangle C_1AC_2$ kā krustleņķi, tad $\Delta B_1AB_2 \sim \Delta C_1AC_2$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tātad $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros.

2. atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle C_1B_1A = \sphericalangle C_2B_2A = 90°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz diametru, tad ap četrstūri $B_1B_2C_2C_1$ var apvilkt riņķa līniju (skat. 79. att.). Līdz ar to $\sphericalangle B_2B_1C_2 = \sphericalangle C_2C_1B_2$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku B_2C_2. Tātad $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$.



79. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
1. atrisinājums	
Zīmējumā novilkti nogriežņi B_1C_1 un B_2C_2	1
Pamato, ka $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2$	4
Pamato, ka $\Delta B_1AB_2 \sim \Delta C_1AC_2$	4
No līdzīgiem trijstūriem secina, ka $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$	1
2. atrisinājums	
Zīmējumā novilkti nogriežņi B_1C_1 un B_2C_2	1
Pamato, ka $\sphericalangle C_1B_1A = \sphericalangle C_2B_2A = 90°$	2
Pamato, ka ap četrstūri $B_1B_2C_2C_1$ var apvilkt riņķa līniju	5
No ievilktajiem leņķiem secina, ka $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	18	177	80	36	29	12	23	7	6	15	12	84
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,23								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ievilkto leņķu īpašība,
2) trijstūru līdzības pazīmes,
3) apgrieztā teorēma par ievilktajiem leņķiem – ja četrstūrī $ABCD$ ir spēkā vienādība $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, tad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

11.4. Pierādīt, ka nevienādība $\frac{a}{b}(a+1)^2 + \frac{b}{a}(b+1)^2 \geq 2(a+1)(b+1)$ ir spēkā visiem reāliem pozitīviem skaitļiem a un b.

1. atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad abas nevienādības puses drīkst reizināt ar ab. Iegūstam pierādāmajai nevienādībai ekvivalentu nevienādību

$$a^2(a+1)^2 + b^2(b+1)^2 \geq 2a(a+1)b(b+1);$$
$$a^2(a+1)^2 - 2a(a+1)b(b+1) + b^2(b+1)^2 \geq 0.$$

Ekvivalenti pārveidojam šīs nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\big(a(a+1)\big)^2 - 2a(a+1)b(b+1) + \big(b(b+1)\big)^2 \geq 0;$$
$$\big(a(a+1) - b(b+1)\big)^2 \geq 0.$$

Reāla skaitļa kvadrāts ir vienmēr ir nenegatīvs. Līdz ar to iegūta patiesa nevienādība un arī dotā nevienādība ir patiesa, jo tika veikti tikai ekvivalenti pārveidojumi.

2. atrisinājums. Dotā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai

$$\frac{a}{b}(a+1)^2 + \frac{b}{a}(b+1)^2 - 2(a+1)(b+1) \geq 0.$$

Ievērojot, ka a un b ir pozitīvi skaitļi, ekvivalenti pārveidojam šīs nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 (a+1)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 (b+1)^2 - 2(a+1)(b+1) \geq 0;$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}(a+1)\right)^2 - 2\sqrt{\frac{a}{b}}(a+1)\sqrt{\frac{b}{a}}(b+1) + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}(b+1)\right)^2 \geq 0;$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}(a+1) - \sqrt{\frac{b}{a}}(b+1)\right)^2 \geq 0.$$

Reāla skaitļa kvadrāts ir vienmēr ir nenegatīvs. Līdz ar to iegūta patiesa nevienādība un arī dotā nevienādība ir patiesa, jo tika veikti tikai ekvivalenti pārveidojumi.

3. atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad dotās nevienādības kreisās puses izteiksmi var novērtēt, izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\frac{a}{b}(a+1)^2 + \frac{b}{a}(b+1)^2 \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}(a+1)^2 \cdot \frac{b}{a}(b+1)^2} = 2(a+1)(b+1),$$

kas arī bija jāpierāda.

Vērtēšanas kritēriji

1., 2. atrisinājums	
Abas nevienādības puses reizina ar $ab > 0$ vai pārraksta izteiksmes, izmatojot kvadrātsaknes, ievērojot, ka $a, b > 0$	2
Atdalīts pilnais kvadrāts	7
Secinājums, ka dotā nevienādība ir patiesa	1
Ideja, ka var izmantot formulu $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$	1
3. atrisinājums	
Izmantota nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko un iegūts vajadzīgais	10
Ideja, ka var izmantot sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	15	126	45	82	19	23	4	6	2	18	27	132
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,41								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.
Uzdevums par nevienādību pierādīšanu, atdalot pilno kvadrātu (skat. teoriju pielikumā).
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) izteiksmes novērtēšana.

11.5. Atrast visus pirmskaitļu pārus $(m; n)$, kuriem $20m + 19n = 2019$.

1. atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu

$$2000 - 20m = 19n - 19;$$
$$20(100 - m) = 19(n - 1).$$

Ievērojam, ka iegūtās vienādības labās puses izteiksme ir pozitīva, tātad arī $(100 - m)$ jābūt pozitīvam. Tā kā 20 un 19 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $(100 - m)$ ir jādalās ar 19. Iespējamās m vērtības varētu būt 5, 24, 43, 62 un 81, no kurām derīgas ir tikai 5 un 43, jo tie ir pirmskaitļi. Atrodam atbilstošās n vērtības:

- ja $m = 5$, tad $20 \cdot 95 = 19(n - 1)$ jeb $n = 101$ (pirmskaitlis),
- ja $m = 43$, tad $20 \cdot 57 = 19(n - 1)$ jeb $n = 61$ (pirmskaitlis).

Tātad dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi: $m = 5, n = 101$ un $m = 43, n = 61$.

2. atrisinājums. Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 19.

Tā kā $20m \equiv 1 \cdot m \equiv m \pmod{19}$, $19n \equiv 0 \pmod{19}$ un $2019 \equiv 5 \pmod{19}$, tad, lai būtu vienādība, jāizpildās nosacījumam $m \equiv 5 \pmod{19}$. Ievērojot, ka $20 \cdot 101 = 2020 > 2019$, secinām, ka $m < 101$. Tātad derīgās m vērtības ir pirmskaitļi, kas mazāki nekā 101, un, dalot ar 19, dod atlikumu 5. Šādas vērtības ir tikai divas $m = 5$ un $m = 43$. Atrodam atbilstošās n vērtības:

- ja $m = 5$, tad $20 \cdot 95 = 19(n - 1)$ jeb $n = 101$ (pirmskaitlis),
- ja $m = 43$, tad $20 \cdot 57 = 19(n - 1)$ jeb $n = 61$ (pirmskaitlis).

Tātad dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi: $m = 5, n = 101$ un $m = 43, n = 61$.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Vienādojums pārveidots formā $20(100-m)=19(n-1)$	3
Secina, ka $(100-m)$ dalās ar 19	2
Atrod derīgās m vērtības, kas ir pirmskaitļi	3
Atrod atbilstošās n vērtības	2
2. atrisinājums	
Apskata doto vienādojumu pēc moduļa 19 un secina, ka $m \equiv 5 \pmod{19}$	5
Atrod derīgās m vērtības, kas ir pirmskaitļi	3
Atrod atbilstošās n vērtības	2
Veikta pilnā pārlase, pārbaudot visus pirmskaitļus m, kas mazāki nekā 101	10
Uzrakstīta tikai pareiza atbilde	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	12	94	44	22	17	8	32	24	32	44	65	105
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,52								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.
Uzdevums par vienādojumiem veselos skaitļos.
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) sadalīšana reizinātājos,
2) pirmskaitļa definīcija,
3) visu derīgo gadījumu apskatīšana.

12. klase

12.1. Urnā atrodas 66 baltas un nezināms skaits melnu lodīšu. Ja uz labu laimi tiek izvilktas divas lodītes, tad varbūtība, ka abas lodītes būs vienā krāsā, sakrīt ar varbūtību, ka lodītes būs dažādās krāsās. Cik melno lodīšu atrodas urnā?

Atrisinājums. Tā kā varbūtība, ka abas lodītes būs vienā krāsā, sakrīt ar varbūtību, ka lodītes būs dažādās krāsās, tad abas varbūtības ir $\frac{1}{2}$. Varbūtību, ka abas lodītes būs vienā krāsā, aprēķināsim izmantojot formulu $P(A)=\frac{k}{n}$, kur k ir labvēlīgo notikumu skaits un n ir visu notikumu kopskaits.

Ar m apzīmējam melno lodīšu skaitu. Tad labvēlīgo notikumu (abas lodītes ir vienā krāsā) skaits ir $66\cdot 65+m(m-1)$ un visu notikumu kopskaits (izņemtas divas lodītes) ir $(66+m)(65+m)$. Līdz ar to varbūtība, ka abas izvilktās lodītes ir vienādā krāsā, ir $\frac{m(m-1)+66\cdot 65}{(66+m)(65+m)}$.

Lai iegūtu melno lodīšu skaitu, jāatrisina vienādojums

$$\frac{m(m-1)+66\cdot 65}{(66+m)(65+m)}=\frac{1}{2}.$$

Reizinām abas vienādojuma puses ar $2(66+m)(65+m)>0$, iegūstam

$$2m^2-2m+2\cdot 66\cdot 65=66\cdot 65+131m+m^2;$$
$$m^2-133m+66\cdot 65=0.$$

Šī vienādojuma saknes ir $m_1=78$ un $m_2=55$. Tātad urnā atrodas 78 vai 55 melnas lodītes.

Piezīme. Varbūtību, ka abas izņemtās lodītes ir vienā krāsā, var arī aprēķināt, izmantojot notikumu summas varbūtību, tas ir, ja notikumi A un B ir nesavienojami, tad $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, kur A – abas izņemtās lodītes ir baltas un B – abas izņemtās lodītes ir melnas. Aprēķinām varbūtību $P(A)$. Ar m apzīmējam melno lodīšu skaitu. Varbūtība, ka pirmā izvilktā lodīte ir balta, ir $\frac{66}{66+m}$ un varbūtība, ka otrā izvilktā lodīte arī ir balta (ja pirmā bija balta), ir $\frac{66-1}{66+m-1}$. Tātad varbūtība, ka abas izvilktās lodītes ir baltas, ir $P(A)=\frac{66\cdot 65}{(66+m)(65+m)}$. Līdzīgi iegūstam, ka varbūtība, ka abas izvilktās lodītes ir melnas, ir $P(B) = \frac{m(m-1)}{(66+m)(65+m)}$. Līdz ar to varbūtība, ka abas izvilktās lodītes ir vienādā krāsā, ir $\frac{m(m-1)}{(66+m)(65+m)} + \frac{66 \cdot 65}{(66+m)(65+m)}$.

Vērtēšanas kritēriji

Secina, ka varbūtība, ka abas izvilktās lodītes būs vienā krāsā, ir vienāda ar $\frac{1}{2}$	1
Iegūst vienādojumu $\frac{m(m-1)+66 \cdot 65}{(66+m)(65+m)} = \frac{1}{2}$	5
Atrisina iegūto vienādojumu	4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	169	92	47	22	22	7	18	3	5	4	71
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,81								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) klasiskā varbūtību aprēķināšanas formula,
2) vienādojuma sastādīšana un atrisināšana.

12.2. Brigita ir iedomājusies naturālu skaitli, kas nepārsniedz 60. Indra drīkst Brigitai uzdot jautājumus, uz kuriem atbilde ir "jā" vai "nē". Kā, uzdodot sešus jautājumus, Indra noteikti var uzzināt Brigitas iedomāto skaitli?

1. atrisinājums. Indra domās sadala skaitļus divos vienāda apjoma intervālos: [1; 30] un [31; 60]. Pirmais jautājums: "Vai iedomātais skaitlis pieder intervālam [1; 30]?"

- Ja atbilde uz pirmo jautājumu ir "jā", tad nākamais jautājums jāuzdod par divreiz mazāku intervālu nekā tas, par kuru jau zināms, ka tajā atrodas iedomātais skaitlis, tas ir, "Vai iedomātais skaitlis pieder intervālam [1; 15]?"
- Ja atbilde uz pirmo jautājumu ir "nē", tad iedomātais skaitlis atrodas intervālā [31; 60] un nākamais jautājums būtu jāuzdod par divreiz mazāku intervālu [31; 45].

Līdzīgi Indrai jārīkojas arī turpmākajos jautājumos, tas ir, atkarībā no atbildes vienmēr jāaplūko tas intervāls, kas satur iedomāto skaitli, un šis intervāls jāsadala divos pēc apjoma vienādos intervālos (katrā no abiem intervāliem ir vai nu n skaitļi, vai arī vienā ir n, bet otrā $n+1$ skaitlis). (Skat., piemēram, 80. att., kurā parādīts, kāda apjoma intervālos notiek dalīšana.)

Šādi rīkojoties, ar sešiem jautājumiem Indra noteikti var uzzināt Brigitas iedomāto skaitli.

Piezīme. Atrisinājums balstīts uz "skaldi un valdi" algoritmu.

2. atrisinājums. Tā kā Brigitas iedomātais skaitlis nepārsniedz 60, tad to binārajā skaitīšanas sistēmā var uzrakstīt izmantojot ne vairāk kā 6 ciparus. Indrai jāuzdod jautājums par katru skaitļa ciparu:

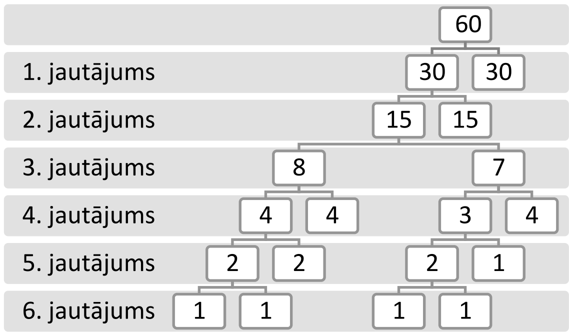
1. jautājums – Vai skaitļa pirmais cipars binārajā skaitīšanas sistēmā ir 1?

2. jautājums – Vai skaitļa otrais cipars binārajā skaitīšanas sistēmā ir 1?

...

6. jautājums – Vai skaitļa sestais cipars binārajā skaitīšanas sistēmā ir 1?

Tā kā skaitļa binārajā pierakstā tiek izmantoti tikai cipari 0 un 1, tad šādi rīkojoties, ar sešiem jautājumiem Indra noteikti var uzzināt Brigitas iedomāto skaitli.



80. att.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Ideja, ka vienā jautājumā skaitļi jāsadala divās (pēc iespējas) vienāda apjoma grupās	1
Aprakstīts vai attēlots, kā var uzzināt iedomāto skaitli	9
2. atrisinājums	
Ideja, ka var izmantot skaitļa bināro pierakstu	1
Aprakstīts, kā var uzzināt iedomāto skaitli	9
Apskatīti tikai daži speciālgadījumi vai prasītais noskaidrots, bet izmantoti vairāk nekā 6 jautājumi	Ne vairāk kā 4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	56	26	26	17	25	15	20	15	33	34	197
Vidēji iegūtais punktu skaits			6,61									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.
Uzdevums ir standartuzdevums par algoritmu “skaldi un valdi” (skat. teoriju pielikumā).
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

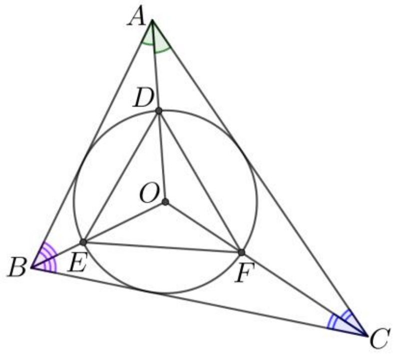
1) algoritma izveidošana,
2) visu gadījumu apskatīšana.

12.3. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir O. Nogriežņi OA, OB, OC krusto šo riņķa līniju attiecīgi punktos D, E, F. Zināms, ka $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir regulārs!

1. atrisinājums. Punkts O ir trijstūra ABC bisektrišu krustpunkts (skat. 81. att.). Apzīmējam $\sphericalangle BAC=2\alpha$, $\sphericalangle ABC=2\beta$ un $\sphericalangle ACB=2\gamma$. Tad $\sphericalangle DOF=180°-\alpha-\gamma$ un $\sphericalangle ODF=\sphericalangle DFO=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, jo ΔODF ir vienādsānu. Līdzīgi iegūstam, ka $\sphericalangle EDO=\sphericalangle DEO=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ un $\sphericalangle OEF=\sphericalangle OFE=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$.

Tātad ΔDEF iekšējo leņķu lielumi ir $\sphericalangle EDF=\alpha+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\sphericalangle DEF=\beta+\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, $\sphericalangle EFD=\gamma+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Izmantojot, ka $\alpha+\beta+\gamma=90°$, iegūstam $\sphericalangle EDF=\frac{\alpha}{2}+45°$, $\sphericalangle DEF=\frac{\beta}{2}+45°$ un $\sphericalangle EFD=\frac{\gamma}{2}+45°$. Tā kā $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$, tad $\Delta ABC\sim\Delta DEF$ pēc pazīmes mmm un atbilstošie trijstūru leņķi ir vienādi, tas ir, $2\alpha=\frac{\alpha}{2}+45°$, $2\beta=\frac{\beta}{2}+45°$ un $2\gamma=\frac{\gamma}{2}+45°$. Tātad $\alpha=\beta=\gamma=30°$ jeb $2\alpha=2\beta=2\gamma=60°$ un ΔABC ir regulārs.

2. atrisinājums. Punkts O ir trijstūrim DEF apvilktās riņķa līnijas centrs – vidusperpendikulu krustpunkts. Tā kā $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$, tad trijstūri ABC un DEF ir homotētiski ar homotētijas centru O. Tātad trijstūrī DEF ievilktās riņķa līnijas centrs arī ir O. Tā kā trijstūra DEF bisektrišu krustpunkts sakrīt ar vidusperpendikulu krustpunktu, tad tas ir regulārs trijstūris. Līdz ar to arī trijstūris ABC ir regulārs.



81. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
1. atrisinājums	
Uzraksta, ka punkts O ir trijstūra ABC bisektrišu krustpunkts	1
Divos veidos izsaka trijstūra DEF leņķus, izmantojot trijstūra ABC leņķus	7
Iegūst un atrisina vienādojumus	2
2. atrisinājums	
Uzraksta, ka punkts O ir trijstūra ABC bisektrišu krustpunkts	1
Punkts O ir trijstūrim DEF apvilktās riņķa līnijas centrs – vidusperpendikulu krustpunkts	1
Secina, ka trijstūri ABC un DEF ir homotētiski ar homotētijas centru O	3
Secina, ka trijstūra DEF bisektrišu krustpunkts sakrīt ar vidusperpendikulu krustpunktu	2
Secina, ka trijstūris DEF ir regulārs un arī trijstūris ABC ir regulārs	3

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	133	80	94	56	9	10	8	16	5	18	31
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,60								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu krustpunktā,
2) trijstūra leņķu izteikšana,
3) trijstūru līdzības pazīmes,
4) homotētija.

12.4. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|$.

1. atrisinājums. Ja $b=c$, tad dotā nevienādība ir patiesa.

Ja $b>c$, tad jāpierāda, ka $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2} \leq b-c$. Reizinot abas nevienādības puses ar saistīto izteiksmi $\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}\right)$, iegūstam $b^2-c^2 \leq (b-c)\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}\right)$.

Tālāk, dalot abas nevienādības puses ar $(b-c)$, kas ir pozitīvs skaitlis, iegūstam

$$b+c \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2},$$

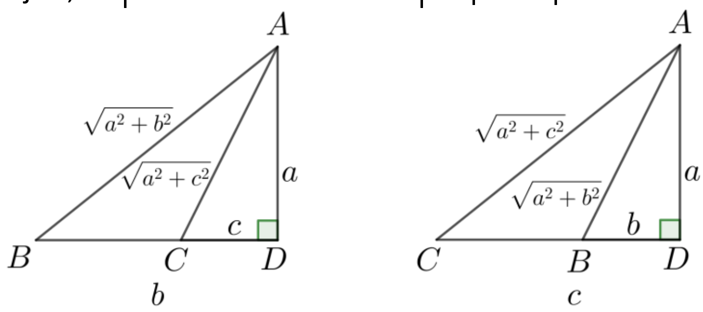
kas ir patiesa nevienādība, jo $b \leq \sqrt{a^2+b^2}$ un $c \leq \sqrt{a^2+c^2}$.

Ja $b < c$, tad jāpierāda, ka $\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2} \le c - b$, ko var izdarīt analogi kā iepriekšējā gadījumā.

2. atrisinājums. Ja $b = c$, tad dotā nevienādība ir patiesa.

Apskatām gadījumu, kad $b \neq c$. Novelkam nogriezni AD, kura garums ir a. Tam perpendikulāri no punkta D uz vienu pusi atliekam nogriežņus BD un CD, kuru garumi attiecīgi ir b un c (iespējami divi gadījumi, skat. 82. att.). No Pitagora teorēmas trijstūros ADB un ADC iegūstam, ka $AC = \sqrt{a^2+c^2}$ un $AB = \sqrt{a^2+b^2}$. Ievērojam, ka $BC = |BD - CD| = |b - c|$. No trijstūra nevienādības trijstūrī ABC iegūstam $BC > |AB - AC|$ jeb $|b - c| > \left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right|$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \le |b - c|$.



82. att.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Apskatīts gadījums, kad $b = c$	1
Ideja, ka var reizināt ar saistīto izteiksmi $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}$	1
Pierādīts, ka nevienādība ir patiesa vienā no gadījumiem $b > c$ vai $b < c$	7
Uzrakstīts, ka otru gadījumu pierāda analoģiski	1
2. atrisinājums	
Apskatīts gadījums, kad $b = c$	1
Ideja, ka uzdevumu var interpretēt, izmantojot nogriežņus ar garumiem a, b, c	1
Izveido atbilstošu ģeometrisku zīmējumu	1
Ar Pitagora teorēmu iegūst nogriežņu garumus $\sqrt{a^2+c^2}$ un $\sqrt{a^2+b^2}$	2
Izmantojot trijstūra nevienādību, pamato prasīto	5

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	19	201	76	34	15	12	9	6	5	10	15	65
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,72								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par nevienādību ar moduli,
2) gadījumu šķirošana,
3) reizināšana ar saistīto izteiksmi,
4) nevienādības pierādīšana,
5) saskaitāmo un summas novērtēšana.

12.5. Pierādīt, ka vienādojumam $(a-b)^2 = a+b$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos!

Atrisinājums. Pamatosim, ka der vērtības formā $a = \frac{k(k+1)}{2}$ un $b = \frac{k(k-1)}{2}$, kur k ir naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 1:

- a un b ir naturāli skaitļi, jo $k(k+1)$ un $k(k-1)$ dalās ar 2 kā divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājums;
- ievietojot šīs vērtības dotajā vienādojumā, iegūstam patiesu vienādību:

$$\left(\frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\left(\frac{2k}{2}\right)^2 = \frac{2k^2}{2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = k^2$$

Tā kā šādu k vērtību ir bezgalīgi daudz, tad arī dotajam vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu:

Piezīme. Meklētās a un b vērtības var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi.

1. veids. Apzīmējam $a-b=k$, tad $k^2 = a+b$. Saskaitot abas vienādības, iegūstam $2a = k + k^2$ jeb $a = \frac{k(k+1)}{2}$. Aprēķinām $b = a - k = \frac{k^2+k}{2} - k = \frac{k^2-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$.

2. veids. Apzīmējam $a-b=k$, tad $a+b = k+2b$, tātad doto vienādojumu var pārrakstīt formā $k^2 = k+2b$, no kā iegūstam, ka $b = \frac{k^2-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ un $a = k+b$.

Vērtēšanas kritēriji

Uzrakstīts, ka der vērtības formā $a = \frac{k(k+1)}{2}$ un $b = \frac{k(k-1)}{2}$, kur k ir naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 1	4
Pamatots, ka atbilstošās a un b vērtības ir naturāli skaitļi	2
Pamatots, ka, ievietojot šīs vērtības dotajā vienādojumā, iegūstam patiesu vienādību (vai arī atbilstošās a un b vērtības iegūtas spriedumu ceļā)	4
Atrasts viens vai daži atrisinājumi	Ne vairāk kā 4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	25	245	62	30	18	32	5	3	9	6	9	23
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,74								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.
Uzdevums par vienādojumiem naturālos skaitļos.
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) sakņu atrašana un pamatojums, ka atrastās vērtības der,
2) vispārināšana.

Valsts olimpiāde - 2019

9. klase

9.1. Reālus skaitļus a un b saista sakarība $\frac{4a^2-7b^2}{ab} = 12$. Kāda var būt $\frac{4a^2+7b^2}{ab}$ vērtība?

Atrisinājums. Pārveidojot doto izteiksmi, iegūstam:

$$4a^2 - 7b^2 = 12ab;$$
$$4a^2 - 12ab + 9b^2 = 16b^2;$$
$$(2a-3b)^2 = (4b)^2;$$
$$2a - 3b = \pm 4b.$$

Apskatām katru gadījumu.

1. Ja $2a-3b=4b$ jeb $2a=7b$ un $a=\frac{7}{2}b$, tad

$$\frac{4a^2+7b^2}{ab}=\frac{(7b)^2+7\cdot b^2}{\frac{7}{2}b\cdot b}=\frac{49b^2+7b^2}{\frac{7}{2}b^2}=56\cdot\frac{2}{7}=8\cdot 2=16.$$

2. Ja $2a-3b=-4b$ jeb $b=-2a$, tad

$$\frac{4a^2+7b^2}{ab}=\frac{4a^2+7(-2a)^2}{-2a^2}=\frac{4a^2+28a^2}{-2a^2}=\frac{32}{-2}=-16.$$

Tātad izteiksmes $\frac{4a^2+7b^2}{ab}$ vērtība ir vai nu 16 (ja $a=\frac{7b}{2}$), vai -16 (ja $b=-2a$).

Piezīme. Sakarību starp a un b var iegūt arī, dotās vienādības kreisās puses izteiksmes skaitītāja katru saskaitāmo izdalot ar ab, apzīmējot $\frac{a}{b}=x$ un atrisinot vienādojumu $4\frac{a}{b}-7\frac{b}{a}=12$ jeb $4x-\frac{7}{x}=12$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	8	22	18	1	1	4	0	2	1	8	7
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,46								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

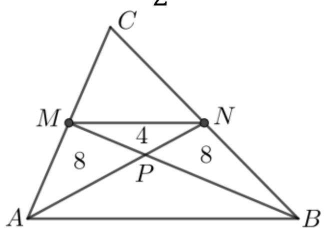
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ekvivalentu pārveidojumu veikšana,
2) gadījumu šķirošana,
3) daļveida vienādojuma risināšana.

9.2. Uz trijstūra ABC malām AC un BC attiecīgi atlikti punkti M un N. Nogriežņi AN un BM krustojas punktā P. Aprēķināt trijstūra ABC laukumu, ja $S(AMP)=S(BNP)=8$ un $S(NMP)=4$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $S(MAN)=S(NBM)=8+4=12$ (skat. 83. att.) un šiem trijstūriem ir kopīga mala MN, tāpēc augstumi, kas no virsotnēm A un B novilkti pret šo malu MN, ir vienādi jeb punkti A un B atrodas vienādā attālumā no nogriežņa MN. Tātad $MN||AB$. Apskatām attiecību

$$\frac{S(MNP)}{S(PNB)}=\frac{\frac{1}{2}MP\cdot h_{MP}}{\frac{1}{2}BP\cdot h_{BP}}.$$



83. att.

Ievērojot, ka $h_{MP}=h_{BP}$, iegūstam $\frac{MN}{AB}=\frac{MP}{BP}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Trijstūri MPN un BPA ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle MPN=\sphericalangle BPA$ kā krustleņķi $\sphericalangle MNA=\sphericalangle NAB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm MN un AB. Tad $\frac{S(MPN)}{S(BPA)}=\left(\frac{MP}{BP}\right)^2=\frac{1}{4}$, no kā izriet, ka $S(BPA)=4\cdot 4=16$. Esam ieguvuši, ka $S(AMNB)=4+8\cdot 2+16=36$.

Tā kā $MN||AB$, tad $\Delta MCN\sim\Delta ACB$ un $\frac{S(MCN)}{S(ACB)}=\left(\frac{MN}{AB}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ jeb $\frac{S(ACB)-36}{S(ACB)}=\frac{1}{4}$. Izsakām trijstūra ACB laukumu:

$$4\cdot S(ACB)-4\cdot 36=S(ACB);$$
$$3\cdot S(ACB)=4\cdot 36;$$
$$\boldsymbol{S(ACB)=48}.$$

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	39	10	6	1	2	0	1	0	1	1	13
Vidēji iegūtais punktu skaits			2,51									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas,
2) trijstūru līdzības pazīmes,
3) figūru laukumu izteikšana.

9.3. Vai naturāla skaitļa kvadrāta ciparu summa var būt **a)** 19, **b)** 2019?

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, $17^2 = 289$ un $2 + 8 + 9 = 19$.

Piezīme. Tā kā $19 \equiv 1 \pmod 9$, tad jāmeklē skaitļi, kuru kvadrāts ir kongruents ar $1 \pmod 9$, tātad paši skaitļi ir $\pm 1 \pmod 9$. Der arī skaitļi 26, 28, 37, 44, 53, 62, 64, 73, 82, 89, 91 utt.

b) Nē, nevar. Naturālā skaitļa n kvadrāta ciparu summa 2019 dalās ar 3, tātad arī n^2 dalās ar 3. Tā kā naturāla skaitļa kvadrāts dalās ar 3, tad arī pats skaitlis n dalās ar 3, bet tādā gadījumā n^2 ir jādalās ar 9. Bet skaitļa n^2 ciparu summa ir 2019, kas nedalās ar 9 nedalās, tātad 2019 nevar būt naturāla skaitļa kvadrāta ciparu summa.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	8	0	0	1	39	4	5	5	0	1	13
Vidēji iegūtais punktu skaits			5,04									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

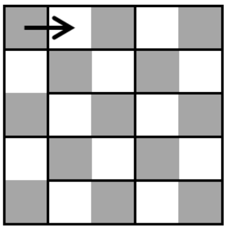
1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) dalāmības pazīme ar 3 un ar 9,
3) vispārīgs pamatojums, ka prasītais nav iespējams.

9.4. Sākotnēji katrā kvadrāta 5×5 rūtiņā atradās tieši viena skudra. Tad katra skudra pārvietojās uz kādu blakus rūtiņu (tas ir, uz rūtiņu, kam ar esošo ir kopīga mala). Kāds tagad ir **a)** mazākais; **b)** lielākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits?

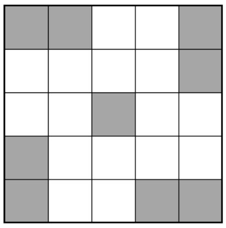
Atrisinājums. a) Mazākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits ir 1. Iekrāsojam doto kvadrātu kā šaha galdiņu (skat. 84.att.). Tad ir 13 melnas un 12 baltas rūtiņas. Tās 13 skudras, kas atrodas 13 melnajās rūtiņās, ir pārvietojušās uz baltajām rūtiņām. Tā kā balto rūtiņu skaits ir 12, tad vismaz vienā rūtiņā nonāks vairāk nekā viena skudra. Tātad vismaz viena rūtiņa paliks tukša. Skat., piemēram, 84.att., kur skudra no augšējās kreisās rūtiņas pārvietojas bultiņas norādītajā virzienā, bet pārējās skudras ar biezāku līniju izceltajos divu rūtiņu laukumos samainās vietām.

b) Lielākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits ir 16. Viens no šādiem pārvietojumiem parādīts 86. att.

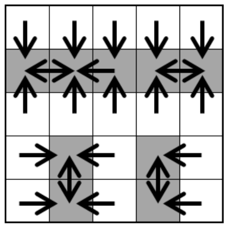
Pamatosim, ka 16 ir lielākais iespējamais tukšo rūtiņu skaits. Skudras, kas atrodas 85. att. iekrāsotajās rūtiņās pēc pārvietošanās uz blakus rūtiņām atkal kopā aizņems 9 rūtiņas, jo nekādas divas no šīm skudrām nevar nonākt vienā un tajā pašā rūtiņā. Tātad var palikt ne vairāk kā $25 - 9 = 16$ tukšas rūtiņas.



84.att.



85. att.



86. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	0	1	21	6	14	8	6	7	6	5	0	3
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,78								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstošu piemēru atrašana,
2) pamatojums, ka atrastās vērtības ir attiecīgi mazākā un lielākā iespējamā.

9.5. Hokeja turnīrā piedalījās 16 komandas. Katra komanda ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Apzīmēsim katras komandas uzvaru un zaudējumu skaitu attiecīgi ar x_i un y_i, $i = 1;\ 2;\ \ldots;\ 16$. Pierādīt, ka

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{16}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{16}^2.$$

Atrisinājums. Tā kā turnīrā piedalījās 16 komandas un katra komanda spēlēja ar katru citu, tad katra komanda ir piedalījusies tieši 15 spēlēs.

Tā kā komanda jebkurā spēlē vai nu uzvarēja, vai zaudēja (neizšķirtu nav), tad skaidrs, ka i-tās komandas uzvaru skaitu var izteikt ar zaudējumu skaitu, tas ir, $x_i = 15 - y_i$. Tad

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{16}^2 &= (15 - y_1)^2 + (15 - y_2)^2 + \cdots + (15 - y_{16})^2 = \\ &= (225 - 30y_1 + y_1^2) + \cdots + (225 - 30y_{16} + y_{16}^2) = \\ &= 16 \cdot 225 - 30 \cdot (y_1 + y_2 + \cdots + y_{16}) + (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{16}^2). \end{aligned}$$

Pavisam kopā tika izspēlētas $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ spēles, tāpēc zaudējumu kopskaits $y_1 + y_2 + \cdots + y_{16} = 120$. Līdz ar to $16 \cdot 225 - 30 \cdot (y_1 + y_2 + \cdots + y_{16}) = 16 \cdot 225 - 30 \cdot 120 = 0$, no kā izriet prasītais, tas ir, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{16}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{16}^2$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	5	7	12	9	14	3	3	2	2	2	16
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,74								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par izspēlēto spēļu skaitu,
2) objektu skaitīšana divos dažādos veidos.

10. klase

10.1. Pierādīt, ka visus naturālos skaitļus, kas lielāki nekā 100, var izteikt kā pirmskaitļa un salikta skaitļa summu!

Atrisinājums. Visus pāra skaitļus, kas lielāki nekā 100, var izteikt kā summu $(2 + p)$, kur p ir pāra skaitlis, kas lielāks nekā 100, tātad p ir salikts skaitlis. Visus nepāra skaitļus, kas lielāki nekā 100, var izteikt kā summu $(3 + p)$, kur p ir pāra skaitlis, kas lielāks nekā 98, tātad p ir salikts skaitlis. Saskaitāmie 2 un attiecīgi 3 ir pirmskaitļi.

Piezīme. Minētā īpašība ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem, kas lielāki nekā 5.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	2	7	11	5	4	1	1	6	8	2	22
Vidēji iegūtais punktu skaits				6,01								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pirmskaitļa un salikta skaitļa definīcija,
2) gadījumu šķirošana un vispārināšana.

10.2. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāle AC ir leņķa A bisektrise, $AC = AD$ un $\sphericalangle B = 90°$. Trijstūrī ADC novilkts augstums DH. Pierādīt, ka taisne BH sadala nogriezni CD uz pusēm!

Atrisinājums. Taisnes BH krustpunktu ar CD apzīmējam ar P (skat. 87. att.). Tātad jāpierāda, ka $CP = PD$.

Apzīmējam $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = 2\alpha$ (jo AC ir leņķa A bisektrise). Tā kā trijstūris AHD ir taisnleņķa, tad

$$\sphericalangle ADH = 90° - 2\alpha.$$

Tā kā pēc dotā $AC = AD$, tad trijstūris CAD ir vienādsānu un

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha.$$

Aprēķinām

$$\sphericalangle HDP = \sphericalangle ADC - \sphericalangle ADH = 90° - \alpha - (90° - 2\alpha) = \alpha.$$

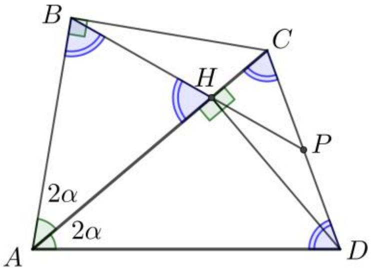
Taisnleņķa trijstūri ABC un AHD ir vienādi pēc pazīmes $h\ell$, jo $AC = AD$ un $\sphericalangle BAC = \sphericalangle HAD$. Tātad $AB = AH$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros. Līdz ar to trijstūris BAH ir vienādsānu un

$$\sphericalangle ABH = \sphericalangle BHA = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha.$$

Ievērojam, ka $\sphericalangle CHP = \sphericalangle BHA = 90° - \alpha$ un $\sphericalangle PHD = 90° - \sphericalangle CHP = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.

Tā kā $\sphericalangle HDP = \sphericalangle PHD = \alpha$, tad trijstūris HPD ir vienādsānu un $HP = PD$.

Tā kā $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BHA = 90° - \alpha$, tad trijstūris HPC ir vienādsānu un $HP = CP$. Līdz ar to $CP = PD$.



87. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	5	15	4	3	2	18	1	1	4	1	1	19
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,84								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) leņķu izteikšana,
2) vienādsānu trijstūra pazīme.

10.3. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $13^n + 7^n + 2019$ vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

Atrisinājums. Ievērojam, ka naturālu skaitli n, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0, 1 vai 2, un atrodam, kādu atlikumu var iegūt, ja n^2 dala ar 3:

- ja $n \equiv 0\ (mod\ 3)$, tad $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0\ (mod\ 3)$;
- ja $n \equiv 1\ (mod\ 3)$, tad $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$;
- ja $n \equiv 2\ (mod\ 3)$, tad $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1\ (mod\ 3)$.

Tātad naturāla skaitļa kvadrātu, dalot ar 3, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 3, iegūstam $13^n + 7^n + 2019 \equiv 1^n + 1^n + 0 \equiv 1 + 1 \equiv$ $\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$. Tātad dotā izteiksme, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tātad tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī aplūkojot izteiksmi pēc jebkura skaitļa 3 daudzkārtņa moduļa, tas ir, 6, 9, 12 utt.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	31	6	5	2	5	1	0	0	0	6	12
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,25								

Skaidrojums par uzdevumu

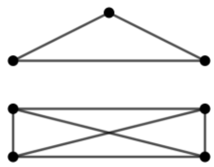
Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

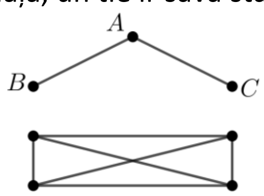
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par atlikumu,
2) gadījumu šķirošana,
3) darbības ar kongruencēm (atlikumiem)
4) pretrunas modelis.

10.4. Komisijā ir 7 cilvēki. Ierodoties uz sēdi, daži no viņiem sarokojas. Kāds ir mazākais iespējamais sarokošanos skaits, lai no katriem trim komisijas locekļiem varētu atrast divus, kas savā starpā sarokojušies?

Atrisinājums. Mazākais iespējamais sarokošanos skaits ir 9, skat., piemēram, 88. att. kur komisijas locekļi ir attēloti ar punktiem, bet sarokošanās – ar līniju starp atbilstošajiem punktiem. Tiešām, no jebkuriem trīs punktiem divi atrodas vienā daļā, un tie ir savā starpā savienoti.


88. att.



89. att.

Pierādīsim, ka mazāk sarokošanos (jeb līniju) nevar būt. Pieņemsim, ka ir novilktas 8 līnijas. Tad ir 16 līniju gali. Tā kā $7 \cdot 3 = 21 > 16$, tad ir tāds punkts A, no kura iziet ne vairāk kā 2 līnijas. Apskatām iespējamos gadījumus.

1) No punkta A neiziet neviena līnija. Tad, lai no katriem trim punktiem vismaz divi būtu savienoti, visiem citiem punktiem jābūt pa pāriem savienotiem, bet tādā gadījumā līniju skaits ir $6 \cdot 5 : 2 = 15$ (pretruna).
2) Punkts A ir savienots ar tieši vienu citu punktu B. Tad, lai no katriem trim punktiem vismaz divi būtu savienoti, pārējiem pieciem punktiem jābūt pa pāriem savienotiem – citādi, izvēloties, piemēram, punktu A un divus citus nesavienotos punktus, iegūsim trīs punktus, no kuriem nekādi divi nav savienoti. Taču tādā gadījumā līniju skaits ir $1 + 5 \cdot 4 : 2 = 11$ (pretruna).

Punkts A ir savienots ar tieši diviem citiem punktiem B un C, tas, ir no A iziet divas līnijas (skat. 89. att.). Bet tad A nav savienots ar 4 atlikušajiem punktiem. Visiem šiem punktiem jābūt pa pāriem savienotiem – citādi, izvēloties punktu A un divus citus nesavienotos punktus, iegūsim trīs punktus, no kuriem nekādi divi nav savienoti. Taču tad jau kopā ir novilktas $2 + 4 \cdot 3 : 2 = 8$ līnijas, tātad citu līniju vairs nav. Šajā gadījumā var atrast trīs tādus punktus, ka nekādi divi no tiem nav savienoti, piemēram, izvēloties punktus B, C un vēl kādu citu punktu (ne A).

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	21	20	6	1	6	7	4	5	0	0	3
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,51								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Uzdevuma risināšanā noder zināšanas par grafu teoriju.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) pamatojums, ka atrastais skaits ir mazākais iespējamais,
3) gadījumu šķirošana.

10.5. Dots, ka $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{1000}$ un $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1000} = 1$. Pierādīt, ja n ir naturāls skaitlis un $1 \leq n \leq 1000$, tad $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \frac{1}{1000}$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka pie $n = 1;\ 2;\ \ldots;\ 999$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

Reizinot abas nevienādības puses ar $n(n+1) > 0$ un veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam:

$$(n+1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq n\big((a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}\big);$$
$$n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n \cdot a_{n+1};$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n \cdot a_{n+1}.$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{1000}$.

Tā kā $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{1000}}{1000} = \frac{1}{1000}$, tad iegūstam, ka

$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1000}}.$$

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	4	30	17	0	3	1	2	2	4	1	0	10
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,69								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ekvivalentu pārveidojumu veikšana,
2) nevienādību pierādīšana,
3) saskaitāmo un daļas novērtēšana.

11. klase

11.1. Kādā valstī ir 100 pilsētas. Starp dažām no tām organizēti avioreisi. Starp katrām divām pilsētām ir augstākais viens reiss. Katrs reiss savieno tikai 2 pilsētas, pa ceļam nenolaižoties citās. Katrs reiss „darbojas” abos virzienos. Reisus organizē 90 aviokompānijas, katra aviokompānija organizē tieši 30 reisus. Ja kompānija organizē reisu starp kādām divām pilsētām (apzīmēsim tās ar A un B), tad tai ir biroji gan pilsētā A, gan pilsētā B. Pierādīt, ka ir tāda pilsēta, kurā ir vismaz 9 biroji!

Atrisinājums. Pamatosim, ka katrai aviokompānijai ir vismaz 9 biroji. Ja kādai kompānijai būtu ne vairāk kā 8 biroji, tad tā varētu noorganizēt ne vairāk kā 28 reisus, jo no 8 elementiem var izveidot ne vairāk kā $8 \cdot 7 : 2 = 28$ pārus (izmantots Dirihlē princips). Tātad katrai kompānijai ir vismaz 9 biroji, un biroju kopskaits ir vismaz $9 \cdot 90 = 810$. Ja katrā no 100 pilsētām būtu ne vairāk kā 8 biroji, tad kopā būtu ne vairāk kā $8 \cdot 100 = 800$ biroji, bet biroju kopskaits ir vismaz 810. Tātad ir tāda pilsēta, kurā ir vismaz 9 biroji.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	36	9	1	0	0	0	2	1	4	9	22
Vidēji iegūtais punktu skaits			4,32									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

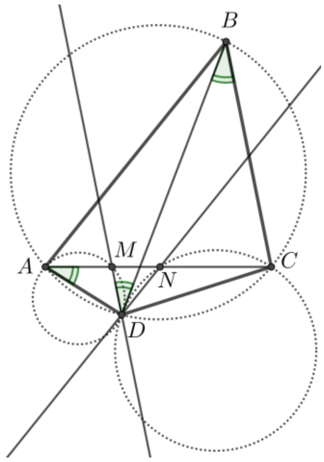
1) Dirihlē princips,
2) objektu skaitīšana,
3) lielumu novērtēšana.

11.2. Ap četrstūri $ABCD$ apvilkta riņķa līnija. Taisne, kas ir paralēla BC un iet caur D, krusto nogriezni AC punktā M. Taisne, kas ir paralēla AB un iet caur punktu D, krusto nogriezni AC punktā N. Pierādīt, ka riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem AMD un DNC, pieskaras viena otrai!

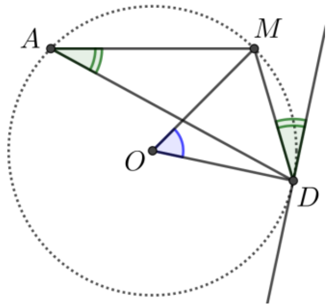
Atrisinājums. Novelkam nogriezni BD (skat. 90. att.). Ievērojam, ka $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Tā kā $DE||BC$, tad $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDM$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm. Līdz ar to $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDM$.

Pamatosim, ka ap AMD apvilktā riņķa līnija pieskaras taisnei BD. Ar O apzīmējam trijstūrim AMD apvilktās riņķa līnijas centru (skat. 91. att.). Ja $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDM = \alpha$, tad $\sphericalangle MOD = 2\alpha$ kā atbilstošais centra leņķis. Tā kā ΔMOD ir vienādsānu, tad $\sphericalangle ODM = \frac{180°-2\alpha}{2} = 90° - \alpha$. Līdz ar to $\sphericalangle ODB = 90° - \alpha + \alpha = 90°$. Tā kā rādiuss OD ir perpendikulārs taisnei BD, tad BD ir pieskare.

Līdzīgi iegūstam, ka ap trijstūri DNC apvilktā riņķa līnija pieskaras taisnei BD. Tātad esam pierādījuši, ka abas riņķa līnijas pieskaras viena otrai punktā D.



90. att.



91. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	10	38	13	8	3	2	3	5	0	0	0	8
Vidēji iegūtais punktu skaits			2,14									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ievilkto leņķu īpašība,
2) pieskares pazīme.

11.3. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $13^n + 10^n + 7^n + 3^n$ vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

Atrisinājums. Ievērojam, ka naturālu skaitli n, dalot ar 4, var iegūt atlikumu 0, 1, 2 vai 3, un atrodam, kādu atlikumu var iegūt, ja n^2 dala ar 4:

- ja $n \equiv 0\ (mod\ 4)$, tad $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0\ (mod\ 4)$;
- ja $n \equiv 1\ (mod\ 4)$, tad $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1\ (mod\ 4)$;
- ja $n \equiv 2\ (mod\ 4)$, tad $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 0\ (mod\ 4)$;
- ja $n \equiv 3\ (mod\ 4)$, tad $n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 1\ (mod\ 4)$.

Tātad naturāla skaitļa kvadrātu, dalot ar 4, var iegūt atlikumu 0 vai 1.

Apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 4, iegūstam

$$13^n + 10^n + 7^n + 3^n \equiv 1^n + 2^n + (-1)^n + (-1)^n \pmod 4.$$

Ja $n = 1$, tad $13 + 10 + 7 + 3 = 33$, kas nav naturāla skaitļa kvadrāts. Ja n ir lielāks nekā 1, tad $2^n \equiv 0 \pmod 4$, un šķirojam divus gadījumus:

- ja ir pāra skaitlis, tad $1^n + 2^n + (-1)^n + (-1)^n \equiv 1 + 0 + 1 + 1 = 3 \pmod 4$;
- ja n ir nepāra skaitlis, tad $1^n + 2^n + (-1)^n + (-1)^n \equiv 1 + 0 - 1 - 1 = -1 \equiv 3 \pmod 4$.

Tātad dotā izteiksme, dalot ar 4, dod atlikumu 3, tātad tā nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Piezīme. Iegūt pretrunu var arī apskatot doto izteiksmi pēc moduļa 9. Ja $n = 1$, tad atlikums, dalot ar 9, ir 6, ja n ir lielāks nekā 1, tad atlikums, dalot ar 9, ir 3, bet naturālu skaitļu kvadrātu vērtības pēc moduļa 9 var būt tikai 0, 1, 4 vai 7.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	8	13	7	0	0	0	4	0	1	1	3	51
Vidēji iegūtais punktu skaits				7,06								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par atlikumu,
2) gadījumu šķirošana,
3) darbības ar kongruencēm (atlikumiem)
4) pretrunas modelis.

11.4. Naturālu skaitļu virknes pirmie divi locekļi ir a_1 un a_2, turklāt $a_2 > a_1$. Katru nākamo virknes locekli, sākot ar trešo, aprēķina pēc formulas $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$. Kādai lielākajai indeksa i vērtībai a_i var būt vienāds ar $100a_1$?

Atrisinājums. Pamatosim, ka lielākā iespējamā indeksa i vērtība ir 11.

Apzīmējam $a_2 = a_1 + p$, kur $p > 0$. Vispārīgā veidā izteiksim dažus nākamos virknes locekļus:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2a_1 + p;$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2a_1 + p + a_1 + p = 3a_1 + 2p;$$
$$a_5 = 5a_1 + 3p;$$
$$a_6 = 8a_1 + 5p;$$
$$a_7 = 13a_1 + 8p;$$
$$a_8 = 21a_1 + 13p;$$
$$a_9 = 34a_1 + 21p;$$
$$a_{10} = 55a_1 + 34p;$$
$$a_{11} = 89a_1 + 55p;$$
$$a_{12} = 144a_1 + 89p.$$

Ievērojam, ka $a_{12} > 100a_1$. Tātad $i \leq 11$. Ja $a_1 = 5$ un $a_2 = 6$, tad

$$a_{11} = 89a_1 + 55p = 89 \cdot 5 + 55 = 445 + 55 = 500 = 100a_1.$$

Piezīme. Lai atrastu a_1 un a_2 vērtības, jāatrisina vienādojums $89a_1 + 55p = 100a_1$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	15	19	4	2	2	3	1	5	0	3	1	35
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,92								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par rekurences sakarībām,
2) virknes locekļu izteikšana,
3) lielumu novērtēšana.

11.5. Koordinātu plaknē doti **a)** 8; **b)** 9 punkti, katram no tiem koordinātas ir veseli skaitļi. Zināms, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Vai noteikti var atrast tādus trīs punktus, ka trijstūrim ar virsotnēm šajos punktos mediānu krustpunkta koordinātas arī ir veseli skaitļi?

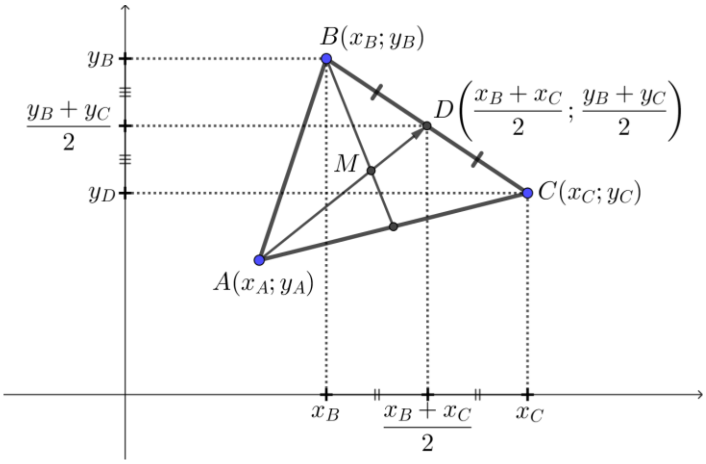
Atrisinājums. Pamatosim, ka trijstūra ar virsotnēm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ un $C(x_C; y_C)$ mediānu krustpunkta M koordinātas ir $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

Izmantojot punkta B un C koordinātas, aprēķinām malas BC viduspunkta D (skat. 92. att.) koordinātas, iegūstam $D\left(\frac{x_B+x_C}{2}; \frac{y_B+y_C}{2}\right)$. Tad $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{x_B+x_C}{2} - x_A; \frac{y_B+y_C}{2} - y_A\right)$. Tā kā $\frac{AM}{MD} = \frac{2}{1}$, tad

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \left(\frac{x_B + x_C - 2x_A}{3}; \frac{y_B + y_C - 2y_A}{3}\right).$$

Izmantojot vektora $\overrightarrow{AM}$ koordinātas un punkta A koordinātas, nosakām punkta M koordinātas: $M\left(\frac{x_B+x_C-2x_A}{3} + x_A; \frac{y_B+y_C-2y_A}{3} + y_A\right)$ jeb $M\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

Tātad trijstūrim, kura koordinātas ir veseli skaitļi $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ un $(x_C; y_C)$ mediānu krustpunkta koordinātas ir veseli skaitļi tad un tikai tad, ja $(x_A + x_B + x_C)$ un $(y_A + y_B + y_C)$ dalās ar 3.



92. att.

a) Nē, ne noteikti. Piemēram nekādiem trīs no šiem astoņiem punktiem $(3; 0)$, $(0; 3)$, $(6; 1)$, $(0; 4)$, $(1; 0)$, $(4; 3)$, $(4; 1)$ un $(1; 7)$ nav spēkā, ka $(x_A + x_B + x_C)$ un $(y_A + y_B + y_C)$ dalās ar 3, jo šo punktu koordinātas pēc moduļa 3 ir $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ un $(1; 1)$ (katra vērtība divas reizes), redzams, ka, summējot 3 no šiem, nevar iegūt ne summu $(0; 0)$, ne $(0; 3)$, ne $(3; 0)$, ne $(3; 3)$.

b) Jā, noteikti. Apskatot patvaļīga punkta koordinātas pēc moduļa 3, var iegūt 9 dažādus gadījumus (skat. 93. att.).

$(0; 0)$	$(1; 0)$	$(2; 0)$
$(0; 1)$	$(1; 1)$	$(2; 1)$
$(0; 2)$	$(1; 2)$	$(2; 2)$

93. att.

Katru no dotajiem 9 punktiem “ievietosim” atbilstošajā rūtiņā. Ja kādā rūtiņā ir ievietoti trīs punkti, tad tos varam ņemt par trijstūra virsotnēm. Ja nav tādas rūtiņas, kurā ir ievietoti vismaz 3 punkti, tad katrā rūtiņā ir ievietoti ne vairāk kā 2 punkti. Tā kā kopā ir 9 punkti, tad ir aizpildītas vismaz 5 rūtiņas. Pietiek apskatīt situāciju, kad ir aizpildītas 5 rūtiņas. Apskatīsim iespējamos gadījumus:

- ja ir tāda rinda, kolonna vai diagonāle, kurā visas rūtiņas ir aizpildītas, tad izvēlamies pa vienam punktam no katras šīs rindas (kolonnas vai diagonāles) rūtiņas – tie ir meklētā trijstūra virsotnes;
- ja nav ne tāda rinda, ne kolonna, kurā visas rūtiņas ir aizpildītas, tad ir tieši divas tādas rindas, kurās ir pa divām aizpildītām rūtiņām un tieši viena rinda, kurā ir aizpildīta viena rūtiņa, tas pats attiecas arī uz kolonnām.

Apskatām gadījumu, kad ir tāda aizpildīta rūtiņa, kas ir vienīgā aizpildītā rūtiņa gan rindā, gan kolonnā. Apzīmējam tajā ievietotā punkta koordinātas pēc moduļa 3 ar $(a_1; b_1)$. Pārējo četru punktu koordinātas ir $(a_2; b_2), (a_2; b_3), (a_3; b_2), (a_3; b_3)$, kur $a_i, b_i \in \{0, 1, 2\}$, turklāt visi a_i ir atšķirīgi un visi b_i ir atšķirīgi. Tad par trijstūra virsotnēm izvēlamies tādus trīs punktus, lai $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 + 1 + 2 \equiv$
$\equiv 0\ (mod\ 3)$ un arī $b_1 + b_2 + b_3 \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0 (mod\ 3)$. Piemēram, var izvēlēties punktus, kuru koordinātas pēc moduļa 3 ir $(a_1; b_1), (a_2; b_2), (a_3; b_3)$.

Apskatām gadījumu, kad ir tāda rūtiņa, kas ir vienīgā aizpildītā rūtiņa rindā, bet ne kolonnā. Šajā rūtiņā ievietotā punkta koordinātas pēc moduļa 3 apzīmējam ar $(a_1; b_1)$. Tātad noteikti ir cita tāda rūtiņa, kas ir vienīgā aizpildītā rūtiņa kolonnā. Šajā rūtiņā ievietotā punkta koordinātas pēc moduļa 3 apzīmējam ar $(a_2; b_2)$. Tā kā abās pārējās kolonnās ir pa divām aizpildītām rūtiņām un nevar būt aizpildīta rūtiņa, kurā ievietotā punkta koordinātas pēc moduļa 3 ir $(a_1; b_3)$, tad noteikti ir aizpildītas rūtiņas, kurās ievietoto punktu koordinātas pēc moduļa 3 ir $(a_2; b_3)$ un $(a_3; b_3)$. Tad par trijstūra virsotnēm izvēlamies tādus trīs punktus, lai $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ un arī $b_1 + b_2 + b_3 \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$. Piemēram, var izvēlēties punktus, kuru koordinātas pēc moduļa 3 ir $(a_1; b_1), (a_2; b_2), (a_3; b_3)$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	18	49	3	2	6	1	5	1	2	0	0	3
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,44									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pretpiemēra atrašana,
2) vispārīgs pamatojums, ka prasītais izpildās,
3) koordinātu metode,
4) mediānas īpašība,
5) punkta koordināšu aprēķināšana,
6) gadījumu šķirošana,
7) darbības ar kongruencēm.

12. klase

12.1. Vienādojumam $x^3 - px + 2019 = 0$, kur p – naturāls skaitlis, ir trīs reālas saknes x_1, x_2, x_3. Kāda var būt izteiksmes $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ vērtība?

1. atrisinājums. Ievērojot, ka x_1, x_2, x_3 ir dotā vienādojuma saknes, to var pārrakstīt formā $x^3 - px + 2019 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. Grupējot locekļus, iegūsim šādas sakarības:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ x_1x_2x_3 = -2019 \end{cases}$$

Tā kā x_1, x_2, x_3 ir dotā vienādojuma saknes, tad iegūstam identitātes:

$$x_1^3 - px_1 + 2019 = 0;$$
$$x_2^3 - px_2 + 2019 = 0;$$
$$x_3^3 - px_3 + 2019 = 0.$$

Saskaitot iegūtās trīs identitātes, iegūstam
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - p(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \cdot 2019 = 0.$$

Līdz ar to $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = p(x_1 + x_2 + x_3) - 3 \cdot 2019 = p \cdot 0 - 3 \cdot 2019 = -6057$.

2. atrisinājums. Ievērojot, ka x_1, x_2, x_3 ir dotā vienādojuma saknes, to var pārrakstīt formā $x^3 - px + 2019 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. Grupējot locekļus, iegūsim šādas sakarības:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ x_1x_2x_3 = -2019 \end{cases}$$

Izsakām prasīto summu:
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2) - 6x_1x_2x_3 =$$
$$= \boldsymbol{(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(p(x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1x_2x_3) - 6x_1x_2x_3 = 3x_1x_2x_3 = 3 \cdot (-2019) =}$$
$$\boldsymbol{= -6057}.$$

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	9	4	2	2	7	0	3	0	4	4	17
Vidēji iegūtais punktu skaits			5,73									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) polinoma sadalīšana reizinātājos,
2) divu polinomu vienādība,
3) ekvivalenti pārveidojumi.

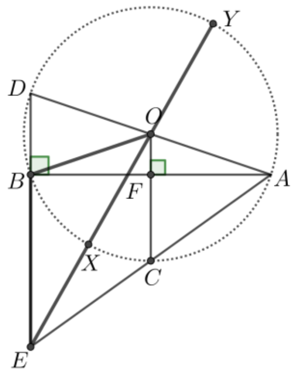
12.2. Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkta horda AB, kas neiet caur O. Caur punktu B novilkts perpendikuls pret AB, kas riņķa līniju vēlreiz krusto punktā D. Uz loka AB, kuram nepieder D, atzīmēts šī loka viduspunkts C. Taisnes AC un DB krustojas punktā E. Pierādīt, ka $OE^2 = OB^2 + 2 \cdot OB \cdot BE$.

1. atrisinājums. Apzīmējam $OB = OC = R$ (skat. 94. att.). Tā kā C ir loka AB viduspunkts, tad OC ir nogriežņa AB vidusperpendikuls, kas krusto AB punktā F. Tātad $OC||DE$. No $AO = OD$ un $OC||DE$ izriet, ka OC ir trijstūra ADE viduslīnija. Tātad $ED = 2OC = 2R$.

Taisnes OE krustpunktus ar riņķa līniju apzīmējam ar X un Y. Apskatām starpību
$$OE^2 - OB^2 = (OE - R)(OE + R) = EX \cdot EY.$$

Tā kā pēc sekanšu īpašības $EX \cdot EY = EB \cdot ED$, tad
$$OE^2 - OB^2 = EB \cdot ED = EB \cdot 2R = 2 \cdot EB \cdot OB.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $OE^2 = OB^2 + 2 \cdot OB \cdot BE$.



94. att.

2. atrisinājums. Novelkam rādiusu OC (skat. 95. att.). Tā kā C ir loka AB viduspunkts, tad OC ir nogriežņa AB vidusperpendikuls, kas AB krusto punktā F. Tātad $OC||DE$. No $AO = OD$ un $OC||DE$ izriet, ka OC ir trijstūra ADE viduslīnija. Tātad

$$ED = 2OC = 2OB.$$

No O velkam perpendikulu OG pret DB. Tā kā trijstūris DOB ie vienādsānu, tad $DG = GB$ un līdz ar to

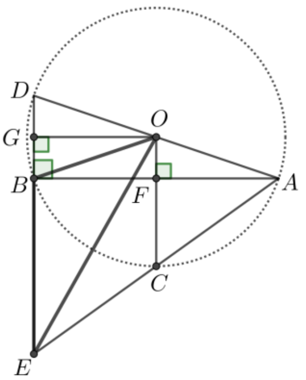
$$ED = EB + 2BG.$$

Tad, izmantojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūrī OGE, pakāpeniski iegūstam

$$OE^2 = OG^2 + EG^2;$$
$$OE^2 = OG^2 + (EB + BG)^2;$$
$$OE^2 = OG^2 + EB^2 + 2 \cdot EB \cdot BG + BG^2;$$

Izmantojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūrī OGB, iegūstam, ka $OG^2 + BG^2 = OB^2$, tad

$$OE^2 = OB^2 + EB^2 + 2 \cdot EB \cdot BG;$$
$$OE^2 = OB^2 + EB \cdot (EB + 2BG);$$
$$OE^2 = OB^2 + EB \cdot ED;$$
$$OE^2 = OB^2 + 2 \cdot EB \cdot OB.$$



95. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	8	7	3	11	3	0	0	1	0	0	21
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,09								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūra viduslīnijas pazīme,
2) Pitagora teorēma,
3) nogriežņu izteikšana.

12.3. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes

$$4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n + 10^n + 11^n + 12^n + 13^n$$

vērtība nav naturāla skaitļa kvadrāts!

Atrisinājums. Doto summu apzīmējam ar S. Aplūkojam katru saskaitāmo un summu S pēc moduļa 8 dažādām n vērtībām.

n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n	10^n	11^n	12^n	13^n	S
1	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	5
2	0	1	4	1	0	1	4	1	0	1	5
3	0	5	0	7	0	1	0	3	0	5	5
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	5
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Ievērojam, ka

- virknes 5^n; 7^n; 11^n; 13^n pēc moduļa 8 ir periodiskas ar periodu 2;
- sākot ar $n = 3$, virknes 4^n; 6^n; 8^n; 9^n; 10^n; 12^n ir periodiskas ar periodu 1.

Tātad visām n vērtībām summas S vērtība pēc moduļa 8 ir vienāda ar 5.

Naturālu skaitļu kvadrātu vērtības pēc moduļa 8 var būt tikai 0, 1 vai 4:

$n \pmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \pmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

Tātad dotā izteiksme nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	6	4	31	4	0	0	1	1	1	0	0	7
Vidēji iegūtais punktu skaits			2,59									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

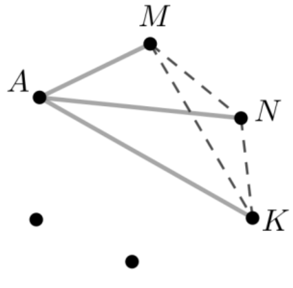
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par atlikumu,
2) gadījumu šķirošana,
3) darbības ar kongruencēm (atlikumiem)
4) pretrunas modelis.

12.4. Doti seši dažādi iracionāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties 3 skaitļus (apzīmēsim tos ar x, y, z) tā, ka visi trīs skaitļi $x + y$, $x + z$, $y + z$ ir iracionāli!

Atrisinājums. Dotos sešus iracionālos skaitļus attēlosim ar punktiem un savienosim divus punktus ar pelēku nogriezni, ja attiecīgo skaitļu summa ir racionāls skaitlis, un ar melnu, ja skaitļu summa ir iracionāls skaitlis.

Pierādīsim, ka eksistē tādi trīs punkti, kas visi savā starpā savienoti ar vienas un tās pašas krāsas nogriežņiem. Apskatām punktu A. No tā iziet vismaz trīs nogriežņi, kas ir vienā un tajā pašā krāsā (izmantots Dirihlē princips). Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka nogriežņi AM, AN un AK ir pelēki (skat. 96. att.). Ja kaut viens no nogriežņiem MN, MK, NK ir pelēks, tad iegūstam pelēku trijstūri; ja tie visi ir melni, tad iegūstam melnu trijstūri MNK.



96. att.

Pierādīsim, ka šis trijstūris, kam visas malas ir vienā krāsā, nav pelēks. Ja $\alpha + \beta = c$, $\alpha + \gamma = b$ un $\beta + \gamma = a$, kur a, b, c ir racionāli skaitļi, tad, saskaitot pirmās divas vienādības un ņemot vērā trešo vienādību, iegūstam, ka $\alpha = \frac{c+b-a}{2}$ ir racionāls skaitlis (pretruna). Tātad *vienkrāsainais* trijstūris ir melns un tā virsotnēs ierakstītie skaitļi ir meklētie.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	14	22	5	4	0	0	1	1	1	1	0	6
Vidēji iegūtais punktu skaits			2,41									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) skaitļu kopas – iracionāli un racionāli skaitļi,
2) interpretācija ar grafu teoriju,
3) Dirihlē princips.

12.5. Atrast

a) vienu tādu naturālu skaitļu pāri $(a; b)$,

b) trīs tādus naturālu skaitļu pārus $(a; b)$, $a < b$,

ka lielākais skaitlis, ko nevar izteikt formā $an + bm$, kur m un n ir nenegatīvi veseli skaitļi, ir 2019.

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka der, piemēram, skaitļi $a = 2$ un $b = 2021$.

Iegūstam izteiksmi $2n + 2021m$. Skaitli 2019 nevar izteikt kā šo skaitļu summu, jo

- $2021 \cdot 1 = 2021 > 2019$;
- $2021 \cdot 0 = 0$ un $2019 - 0 = 2019$, kas nedalās ar 2.

Pamatosim, ka visus skaitļus, kas lielāki nekā 2019, var izteikt formā $2n + 2021m$. Ievērojam, ka

- $2020 = 2 \cdot 1010 + 2021 \cdot 0$ un visus pārējos skaitļus, kas lielāki nekā 2020 un dalās ar 2, iegūstam kā summu $2 \cdot (1010 + k) + 2021 \cdot 0$, kur $k \in \mathbb{N}$;
- $2021 = 2 \cdot 0 + 2021 \cdot 1$ un visus pārējos skaitļus, kas lielāki nekā 2021 un, dalot ar 2, dod atlikumu 1, iegūstam kā summu $2 \cdot k + 2021 \cdot 1$, kur $k \in \mathbb{N}$.

b) Pierādīsim, ja a un b ir savstarpēji pirmskaitļi, tad lielākais skaitlis, ko nevar izteikt ar šiem skaitļiem, ir $ab - a - b$.

Pieņemsim pretējo, ka $ab - b - a$ var izteikt kā $an + bm$. Apskatot izteiksmi $ab - b - a = an + bm$

- pēc moduļa a, iegūstam $-b \equiv bm \ (mod\ a)$ jeb $m \equiv -1 \ (mod\ a)$,
- pēc moduļa b, iegūstam $n \equiv -1 \ (mod\ b)$.

No šī secinām, ka $m \geq a - 1$, jo $m + 1$ dalās ar a un skaitļi m un a nav negatīvi. Tāpat secinām, ka $n \geq b - 1$. Līdz ar to iegūstam, ka

$$an + bm \geq a(b - 1) + b(a - 1) = 2ab - a - b > ab - a - b,$$

kas noved pie pretrunas.

Tagad pamatosim, ka visus naturālos skaitļus, kas ir lielāki nekā $ab - b - a$, var izteikt formā $an + bm$. Tā kā a un b ir savstarpēji pirmskaitļi, tad katram n varam atrast tādus veselus skaitļus x un y, lai $ax + by = n$. Tas nozīmē, ka visiem veseliem k ir patiess arī $a(x + bk) + b(y - ak) = n$. Kādam k izteiksme $(x + bk)$ nebūs negatīva. Atrodam mazāko nenegatīvo vērtību šai izteiksmei un apzīmēsim to ar x' un atbilstošo vērtību pie b ar y'. Tātad $ax' + by' = n$, pie tam $0 \leq x' \leq b - 1$, jo pretējā gadījumā $(x' - b)a + (y' + a)b = n$ un skaitlis $x' - b$ būtu mazāks nenegatīvs skaitlis nekā mūsu jau mazākais x'. Ja $n > ab - a - b$, tad

$$by' = n - ax' > ab - a - b - a(b - 1) = -b,$$

no kurienes izriet, ka $y' > -1$ jeb $y' \geq 0$. Tātad esam atraduši $x', y' \geq 0$, lai $ax' + by' = n$.

Tātad, lai iegūtu a un b vērtības, jāatrisina vienādojums $ab - a - b = 2019$. Vienādojuma abām pusēm pieskaitot 1 un sadalot reizinātājos, iegūstam

$$(a - 1)(b - 1) = 2020.$$

Ievērojot, ka $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, iegūstam

$\boldsymbol{a-1}$	$\boldsymbol{b-1}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$	
1	2020	2	2021	$(2; 2021)$	
2	1010	3	1011		Neder, jo nav savstarpēji pirmskaitļi
4	505	5	506	$(5; 506)$	
5	404	6	405		Neder, jo nav savstarpēji pirmskaitļi
10	202	11	203	$(11; 203)$	
20	101	21	102		Neder, jo nav savstarpēji pirmskaitļi

Piezīme. Skaitļu pāri $(2; 2021)$, $(5; 506)$ un $(11; 203)$ ir vienīgie derīgie.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	9	28	1	4	1	1	6	1	2	1	0	1
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,83									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstošu skaitļu pāru atrašana,
2) saskaitāmo un summas novērtēšana.

9. klase

9.1. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 10 cm, bet perimetrs ir mazāks nekā 30 cm. Kāds var būt trijstūra sānu malas garums?

Atrisinājums. Trijstūra sānu malas garumu apzīmējam ar x. Tad no dotā iegūstam, ka jāizpildās nevienādībai

$$10 + x + x < 30;$$
$$2x < 20;$$
$$x < 10.$$

Lai trijstūris eksistētu, jāizpildās trijstūra nevienādībai, tas ir, $x + 10 > x$ (patiesa visām x vērtībām) un $x + x > 10$ jeb $x > 5$. Līdz ar to $x \in (5; 10)$ jeb trijstūra sānu malas garums ir lielāks nekā 5 cm un mazāks nekā 10 cm.

Vērtēšanas kritēriji

Apzīmē trijstūra malas garumu	1
Iegūst nevienādību $x < 10$	4
Par ideju, ka jāizmanto trijstūra nevienādība	1
Iegūst nevienādību $x > 5$	3
Uzraksta atbildi	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	1	13	21	25	24	32	101	26	20	40	39	254
Vidēji iegūtais punktu skaits			7,20									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija/algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūra perimetra aprēķināšana,
2) trijstūra nevienādība,
3) nevienādību sastādīšana un atrisināšana.

9.2. Pierādīt, ka $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{2019\cdot 2021} = \frac{1010}{2021}$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās vienādība

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Tāpēc pierādāmās vienādības kreisās puses izteiksmi var pārveidot formā:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2019\cdot 2021} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2021}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021}\right).$$

Ievērojam, ka šajā izteiksmē parādās pretēji skaitļi, kuru summa ir 0, līdz ar to pēc vienkāršošanas paliek tikai divi saskaitāmie $\frac{1}{1}$ un $\left(-\frac{1}{2021}\right)$, tātad

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{2019\cdot 2021} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2021}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2020}{2021} = \frac{1010}{2021},$$

kas arī bija jāpierāda.

Vērtēšanas kritēriji

Par pareizu atbildi	2
Pamatots, ka $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$	4
Katrs saskaitāmais uzrakstīts kā divu daļu starpība	2
Ar korektiem pārveidojumiem iegūst pareizo atbildi	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	36	299	110	38	22	20	8	10	16	9	5	23
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,59									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

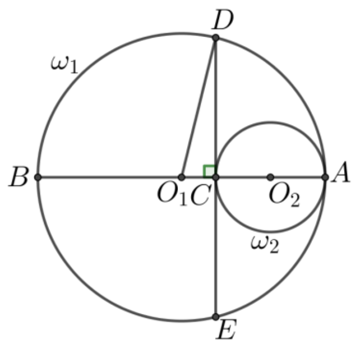
Uzdevums par induktīviem spriedumiem (skat. teoriju pielikumā)

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) darbības ar algebriskām daļām,
2) daļas pārveidošana par divu daļu starpību.

9.3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras punktā A (ω_2 atrodas ω_1 iekšpusē) un ω_1 centrs neatrodas ω_2 iekšpusē. Riņķa līnijas ω_1 diametrs AB šķērso ω_2 punktā C. Zināms, ka ω_1 hordas DE, kas iet caur C perpendikulāri AB, garums sakrīt ar BC garumu. Aprēķināt ω_1 un ω_2 diametru garumu attiecību $\frac{AB}{AC}$.

1. atrisinājums. Simetrijas dēļ $CD = CE$ un pēc dotā $BC = 2CD$ (skat. 97. att.). Pēc krustisku hordu īpašības iegūstam, ka $BC \cdot CA = CD^2$ jeb $2CD \cdot CA = CD^2$, no kā iegūstam $AC = \frac{1}{2}CD$. Tātad $AB = BC + AC = 2CD + \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2}CD$ un varam aprēķināt prasīto $\frac{AB}{AC} = \frac{\frac{5}{2}CD}{\frac{1}{2}CD} = 5$.



97. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam $O_1D = O_1A = R$ un $O_2A = O_2C = r$, kur O_1 un O_2 ir attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centri (skat. 97. att.). Ievērojam, ka $BC = AB - AC = 2R - 2r$, $O_1C = O_1A - AC = R - 2r$ un simetrijas dēļ $CD = \frac{1}{2}BC = R - r$. Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī O_1CD iegūstam, ka $CD^2 = O_1D^2 - O_1C^2$. Līdz ar to esam ieguvuši vienādojumu:

$$\left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = O_1D^2 - O_1C^2;$$
$$(R-r)^2 = R^2 - (R-2r)^2;$$
$$R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 - R^2 + 4Rr - 4r^2;$$
$$R^2 - 6Rr + 5r^2 = 0.$$

Izmantojot grupēšanas paņēmienu, sadalām kreisās puses izteiksmi reizinātājos:

$$R^2 - Rr - 5Rr + 5r^2 = 0;$$
$$R(R-r) - 5r(R-r) = 0;$$
$$(R-r)(R-5r) = 0.$$

Reizinājums ir 0 tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir 0. Tātad iespējami divi gadījumi:

- $R - r = 0$ jeb $R = r$, kas neder, jo riņķa līnijas šajā gadījumā sakrīt;
- $R - 5r = 0$ jeb $R = 5r$, tātad varam aprēķināt prasīto $\frac{AB}{AC} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} = 5$.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums. Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Secina, ka $CD = CE$	1
Secina, ka $BC = 2CD$	1
Iegūst, ka $AC = \frac{1}{2}CD$	4
Aprēķina prasīto $\frac{AB}{AC}$	4
2. atrisinājums. Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Izsaka nogriežņus BC, O_1C, CD ar doto riņķa līniju rādiusiem	3
Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī O_1CD iegūst $CD^2 = O_1D^2 - O_1C^2$	1
Iegūst vienādojumu $R^2 - 6Rr + 5r^2 = 0$	2
Aprēķina prasīto $\frac{AB}{AC}$	4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	16	277	134	82	15	6	3	8	2	6	6	41
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,65								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) krustisku hordu īpašība,
2) nogriežņu garuma izteikšana,
3) Pitagora teorēma.

9.4. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N, katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k, atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N = 4$, **b)** $N = 5$?

Atrisinājums. a) Jā, kartītes var salikt, piemēram, skat. 98. att.

4	1	3	1	2	4	3	2

98. att.

b) Pieņemsim, ka ir izdevies salikt kartītes rindā tā, kā prasīts. Sanumurēsim tās pēc kārtas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 10 (skat. 99. att.).

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

99. att.

Parādīsim, ka ir pāra skaits kartīšu, kas atrodas vietās ar pāra numuriem. No divām kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis 2, viena atrodas vietā ar pāra numuru, otra – vietā ar nepāra numuru. Tas ir spēkā arī kartītēm, uz kurām rakstīts 4.

Tātad no šīm četrām kartītēm divas atrodas vietās ar pāra numuru, bet otras divas – vietās ar nepāra numuru.

Abas kartītes, uz kurām ir rakstīts viens un tas pats nepāra skaitlis (1, 3 vai 5), atrodas vietās, kuru numuriem ir vienāda paritāte (tas ir, abi ir pāra vai abi nepāra), tātad tās izmaina pāra vietās esošo kartīšu skaitu par pāra skaitli (0 vai 2).

Redzam, ka kopā vietās ar pāra numuriem atrodas pāra skaits kartīšu (tāpat arī vietās ar nepāra numuriem).

Bet pavisam ir 5 vietas ar pāra numuriem un 5 vietas ar nepāra numuriem, iegūta pretruna, tātad prasīto izdarīt nevar.

Vērtēšanas kritēriji

Par a) gadījumu (kopā 5 punkti)	
Uzrakstīts, ka kartītes var salikt prasītajā veidā	1
Parādīts pareizs kartīšu izvietojums	4
Par b) gadījumu (kopā 5 punkti)	
Uzrakstīts, ka kartītes nevar salikt prasītajā veidā	1
Par pamatojumu, ka kartītes nevar salikt prasītajā veidā	4
Par atsevišķiem piemēriem, ka kartītes nevar salikt	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	17	99	86	31	8	3	32	177	91	26	9	17
Vidēji iegūtais punktu skaits			4,32									

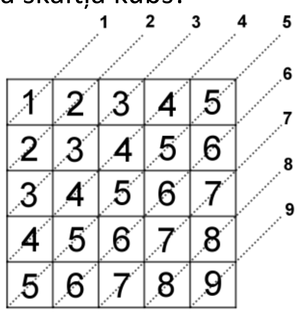
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) vispārīgs pamatojums, ka prasītais nav iespējams.

9.5. Dota $N \times N$ rūtiņu tabula, kurā visas diagonāles ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz $2N-1$. Visās rūtiņās, kas pieder vienai diagonālei, ierakstīts šīs diagonāles numurs (piemēram, 100. att. parādīts tabulas aizpildījums, ja $N=5$). Pierādīt, ka visām naturālām N vērtībām visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kubs!



100. att.

1. atrisinājums. Aplūkojam tādas divas rūtiņas, kas ir simetriskas attiecībā pret galveno diagonāli, kas iet caur visām rūtiņām, uz kurām rakstīts skaitlis N. Ja viena no tām atrodas uz diagonāles, kura ir k diagonāles "pirms" galvenās diagonāles, tad otra atrodas uz diagonāles, kura ir k diagonāles "aiz" galvenās diagonāles, tas nozīmē, ka tajās ir ierakstīti attiecīgi skaitļi $(N-k)$ un $(N+k)$ un to summa ir $2N$. Tas nozīmē, ja abus šajās rūtiņās esošos skaitļus $(N-k)$ un $(N+k)$ aizstāj ar N, tad to summa nemainās. Tā izdarot ar visiem simetriskajiem rūtiņu pāriem, iegūstam kvadrātu, kurā visās $N \cdot N = N^2$ rūtiņās ierakstīts skaitlis N, tātad visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa ir $N^2 \cdot N = N^3$.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka vismazākā ir pirmajā rindā ierakstīto skaitļu summa, bet katrā nākamajā tā ir par N lielāka nekā iepriekšējā rindā. Ja pirmās rindas skaitļu summa ir $s = 1+2+\dots+N$, tad otrās rindas skaitļu summa ir $(s+N)$, trešās rindas skaitļu summa ir $(s+2N)$, ..., pēdējās rindas skaitļu summa ir $(s+(N-1)N)$. Tātad visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir

$$Ns + N\big(1+2+\dots+(N-1)\big) = N(1+2+\dots+N) + N \cdot \frac{N \cdot (N-1)}{2} =$$

$$= N \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2} + N \cdot \frac{N \cdot (N-1)}{2} = \frac{N}{2}(N^2 - N + N^2 + N) = N^3.$$

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums. Par ideju, ka jāizmanto simetrija	2
Pamato, ka divās rūtiņās, kas ir simetriskas attiecībā pret galveno diagonāli, ierakstītos skaitļus var aizstāt ar N	6
Aprēķina visu tabulā ierakstīto skaitļu summu N^3	2
2. atrisinājums. Pamato, ka katrā nākamajā rindā skaitļu summa ir par N lielāka nekā iepriekšējā rindā	2
Uzraksta visu tabulā ierakstīto skaitļu summu, saskaitot katrā rindā esošo skaitļu summu	3
Pārveidojot iegūto izteiksmi, iegūst, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir N^3	5
Par atsevišķiem derīgiem piemēriem	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	28	109	77	172	34	49	39	31	9	13	2	33
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,84								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra/skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) simetrija pret taisni,
2) objektu skaitīšana,
3) aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summas aprēķināšanas formula.

10. klase

10.1. Pierādīt, ka katram naturālam n izpildās vienādība

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}$ jeb $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vienādība izpildās, ja $n=k$, tas ir,

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka vienādība ir spēkā arī tad, ja $n=k+1$, tas ir,

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2(2(k+1)+1)};$$

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\underbrace{\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}}_{induktīvais\ pieņēmums}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{k}{2}+\frac{k+1}{2k+3}\right)=\frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{2k^2+3k+2k+2}{2(2k+3)}\right)=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{(2k+1)2(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{(2k+1)2(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Secinājums. Tā kā vienādība ir patiesa, ja $n=1$, un no tā, ka vienādība ir spēkā, ja $n=k$, izriet, ka vienādība ir spēkā arī $n=k+1$, secinām, ka vienādība ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

Vērtēšanas kritēriji

Pārbaudīta indukcijas bāze	1
Uzrakstīts induktīvais pieņēmums	1
Uzrakstīts, kas jāpierāda (induktīvā pāreja)	1
Pierādīta induktīvā pāreja (veikti korekti pārveidojumi, lai iegūtu vajadzīgo)	6
Secināts, ka vienādība ir patiesa visām naturālām n vērtībām	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	4	31	48	49	69	50	33	16	10	30	42	238
Vidēji iegūtais punktu skaits				6,30								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.
Uzdevums ir standartuzdevums par matemātiskās indukcijas metodi (skat. teoriju pielikumā).
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par matemātiskās indukcijas metodi,
2) indukcijas bāzes pārbaude,
3) induktīvā pieņēmuma uzrakstīšana,
4) induktīvās pārejas veikšana,
5) ekvivalentu pārveidojumu veikšana.

10.2. Vai eksistē tāds dažādmalu trijstūris, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, kas veido ģeometrisko progresiju?

Atrisinājums. Jā, eksistē, piemēram, trijstūris ar malu garumiem 4, 6 un 9, jo šie skaitļi apmierina trijstūra nevienādību: $4+6>9$, $4+9>6$ un $6+9>4$ un tie veido ģeometrisko progresiju, kuras pirmais loceklis ir 4 un kvocients 1,5.

Vērtēšanas kritēriji

Par pareizu atbildi	1
Parādīts derīgs piemērs	7
Parādīts, ka izpildās trijstūra nevienādība	1
Parādīts, ka malu garumi veido ģeometrisko progresiju	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	50	200	170	100	30	10	1	0	2	5	10	42
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,88								

Skaidrojums par uzdevumu

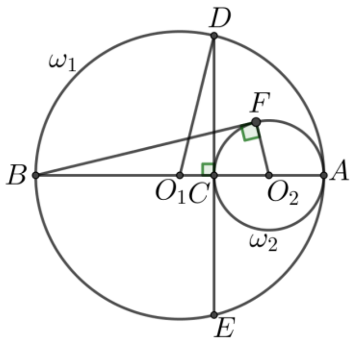
Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ģeometriskās progresijas definīcija,
2) trijstūra nevienādība,
3) atbilstoša piemēra atrašana.

10.3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras punktā A (ω_2 atrodas ω_1 iekšpusē) un ω_1 centrs neatrodas ω_2 iekšpusē. Riņķa līnijas ω_1 diametrs AB šķērso ω_2 punktā C. Pieskares BF, kas no B vilkta pret ω_2, un ω_1 hordas DE, kas iet caur C perpendikulāri AB, garumi sakrīt. Aprēķināt ω_1 un ω_2 diametru garumu attiecību $\frac{AB}{AC}$.

1. atrisinājums. Simetrijas dēļ $CD = CE$ (skat. 101. att.) un pēc dotā $BF = 2CD$. Pēc pieskares-sekantes īpašības iegūstam, ka $BF^2 = BC \cdot AB$ jeb $4CD^2 = BC \cdot AB$ un pēc krustisku hordu īpašības

$BC \cdot AC = CD^2$, no kā iegūstam $4BC \cdot AC = BC \cdot AB$ jeb $4AC = AB$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\frac{AB}{AC} = 4$.



101. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam $O_1D = O_1A = R$ un $O_2A = O_2C = r$, kur O_1 un O_2 ir attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centri (skat. 101. att.). Ievērojam, ka $O_1C = O_1A - AC = R - 2r$ un $O_2B = AB - AO_2 = 2R - r$. Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī O_1CD un BFO_2 iegūstam

- $CD^2 = O_1D^2 - O_1C^2 = R^2 - (R - 2r)^2 = 4Rr - 4r^2$;
- $BF^2 = O_2B^2 - O_2F^2 = (2R - r)^2 - r^2 = 4R^2 - 4Rr$.

Tā kā simetrijas dēļ $CD = \frac{1}{2}BF$, tad $4CD^2 = BF^2$ un iegūstam vienādojumu

$$16Rr - 16r^2 = 4R^2 - 4Rr$$
$$R^2 - 5Rr + 4r^2 = 0.$$

Izmantojot grupēšanas paņēmienu, sadalām kreisās puses izteiksmi reizinātājos:

$$R^2 - Rr - 4Rr + 4r^2 = 0$$
$$R(R - r) - 4r(R - r) = 0$$
$$(R - r)(R - 4r) = 0.$$

Reizinājums ir 0 tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir 0. Tātad iespējami divi gadījumi:

- $R - r = 0$ jeb $R = r$, kas neder, jo riņķa līnijas šajā gadījumā sakrīt;
- $R - 4r = 0$ jeb $R = 4r$, tātad varam aprēķināt prasīto $\frac{AB}{AC} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} = 4$.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums. Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Secina, ka $CD = CE$	1
Secina, ka $BF = 2CD$	1
Iegūst, ka $4AC = AB$	6
Aprēķina prasīto $AB:AC$	2
2. atrisinājums. Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Izsaka nogriežņus O_1C un O_2B ar doto riņķa līniju rādiusiem	1
Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī O_1CD un BFO_2 iegūst CD^2 un BF^2 (izsaka ar rādiusiem)	4
Iegūst vienādojumu $R^2 - 5Rr + 4r^2 = 0$	2
Aprēķina prasīto $AB:AC$	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	27	386	107	40	13	8	6	1	2	2	3	25
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,01								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pieskares-sekantes īpašība,
2) krustisku hordu īpašība,
3) nogriežņu izteikšana,
4) Pitagora teorēma.

10.4. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N, katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k, atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N = 6$, **b)** $N = 7$?

Atrisinājums. a) Pieņemsim, ka ir izdevies salikt kartītes rindā tā, kā prasīts. Sanumurēsim tās pēc kārtas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 12 (skat. 102. att.).

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.

102. att.

Parādīsim, ka ir nepāra skaits kartīšu, kas atrodas vietās ar pāra numuriem. No divām kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis 2, viena atrodas vietā ar pāra numuru, otra – vietā ar nepāra numuru. Tas ir spēkā arī kartītēm, uz kurām rakstīts 4 un arī 6. Tātad no šīm sešām kartītēm trīs atrodas vietās ar pāra numuru, bet otras trīs – vietās ar nepāra numuru.

Abas kartītes, uz kurām ir rakstīts viens un tas pats nepāra skaitlis (1, 3 vai 5), atrodas vietās, kuru numuriem ir vienāda paritāte (tas ir, abi ir pāra vai abi nepāra), tātad tās izmaina pāra vietās esošo kartīšu skaitu par pāra skaitli (0 vai 2).

Redzam, ka kopā vietās ar pāra numuriem atrodas nepāra skaits kartīšu (tāpat arī vietās ar nepāra numuriem).

Bet pavisam ir 6 vietas ar pāra numuriem un 6 vietas ar nepāra numuriem, iegūta pretruna, tātad prasīto izdarīt nevar.

b) Jā, kartītes var salikt, piemēram, skat. 103. att.

5	2	7	3	2	6	5	3	4	1	7	1	6	4

103. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par a) gadījumu (kopā 5 punkti)	
Uzrakstīts, ka kartītes nevar salikt prasītajā veidā	1
Par pamatojumu, ka kartītes nevar salikt prasītajā veidā	4
Par atsevišķiem piemēriem, ka kartītes nevar salikt	1
Par b) gadījumu (kopā 5 punkti)	
Uzrakstīts, ka kartītes var salikt prasītajā veidā	1
Parādīts pareizs kartīšu izvietojums	4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	32	184	129	62	24	6	23	86	43	11	3	17
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,66								

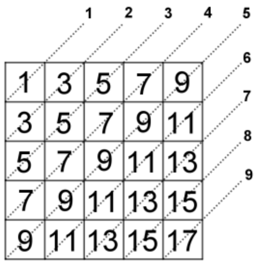
Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) vispārīgs pamatojums, ka prasītais nav iespējams.

10.5. Dota $N \times N$ rūtiņu tabula, kurā visas diagonāles ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz $2N-1$. Katram i, kur $1 \leq i \leq 2N-1$ visās rūtiņās, kas pieder diagonālei ar numuru i, ierakstīts i-tais nepāra skaitlis pēc kārtas (piemēram, 104. att. parādīts tabulas aizpildījums, ja $N=5$). Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu N vērtību, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts!



104. att.

1. atrisinājums. Aplūkojam kādas divas rūtiņas, kas ir simetriskas attiecībā pret galveno diagonāli, kas iet caur visām rūtiņām, uz kurām rakstīts skaitlis $2N-1$. Ja viena no tām atrodas uz diagonāles, kura ir k diagonāles "pirms" galvenās diagonāles, tad otra atrodas uz diagonāles, kura ir k diagonāles "aiz" galvenās diagonāles, tas nozīmē, ka tajās ir ierakstīti attiecīgi skaitļi $(2N-1-2k)$ un $(2N-1+2k)$ un to summa ir $4N-2$.

Tas nozīmē, ja abus šajās rūtiņās esošos skaitļus $(2N-1-2k)$ un $(2N-1+2k)$ aizstāj ar $2N-1$, tad to summa nemainās. Tā izdarot ar visiem simetriskajiem rūtiņu pāriem, iegūstam kvadrātu, kurā visās $N \cdot N = N^2$ rūtiņās ierakstīts skaitlis $2N-1$, tātad visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa ir $N^2 \cdot (2N-1)$. Ja $2N-1$ ir kāda naturāla nepāra skaitļa k kvadrāts (tas ir, $2N-1=k^2$ jeb $N=\frac{k^2+1}{2}$, kur k – jebkurš naturāls nepāra skaitlis), tad tabulā ierakstīto skaitļu summa ir naturāla skaitļa $\frac{k(k^2+1)}{2}$ kvadrāts. Tā kā naturālu nepāra skaitļu ir bezgalīgi daudz, tad arī derīgu N vērtību ir bezgalīgi daudz.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka vismazākā skaitļu summa ir pirmajā rindā, bet katrā nākamajā rindā summa ir tieši par $2N$ lielāka. Ja pirmās rindas rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir s, tad otrajā rindā skaitļu summa ir $s+2N$, trešajā rindā skaitļu summa ir $s+4N$, ..., pēdējā rindā skaitļu summa ir $s+2(N-1)N$. Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $Ns+2N(1+2+\dots+(N-1))$.

Aprēķinām pirmās rindas skaitļu summu: $s=1+3+5+\dots+(2N-1)=1+(1+2)+$
$+(1+4)+\dots+\left(1+2(N-1)\right)==N+2\left(1+2+\ldots+(N-1)\right)=N+N(N-1)=N^2$.

Līdz ar to visas tabulas skaitļu summa ir $N^3+N^2(N-1)=2N^3-N^2=N^2(2N-1)$. Ja $2N-1$ ir kāda naturāla nepāra skaitļa k kvadrāts (tas ir, $2N-1=k^2$ jeb $N=\frac{k^2+1}{2}$, kur k – jebkurš naturāls nepāra skaitlis), tad tabulā ierakstīto skaitļu summa ir naturāla skaitļa $\frac{k(k^2+1)}{2}$ kvadrāts. Tā kā naturālu nepāra skaitļu ir bezgalīgi daudz, tad arī derīgu N vērtību ir bezgalīgi daudz.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums. Par ideju, ka jāizmanto simetrija	2
Pamato, ka divās rūtiņās, kas ir simetriskas attiecībā pret galveno diagonāli, ierakstītos skaitļus var aizstāt ar $2N-1$	5
Aprēķina visu tabulā ierakstīto skaitļu summu $N^2(2N-1)$	1
Pamato, ka ir bezgalīgi daudz derīgu N vērtību	2

2. atrisinājums. Pamato, ka katrā nākamajā rindā skaitļu summa ir par $2N$ lielāka nekā iepriekšējā rindā	2
Uzraksta visu tabulā ierakstīto skaitļu summu, saskaitot katrā rindā esošo skaitļu summu	3
Pārveidojot iegūto izteiksmi, iegūst, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $N^2(2N-1)$	4
Pamato, ka ir bezgalīgi daudz derīgu N vērtību	1
Par atsevišķiem derīgiem piemēriem	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	48	306	130	56	18	9	8	5	6	4	4	26
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,35								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra/skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) simetrija pret taisni,
2) objektu skaitīšana,
3) aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summas aprēķināšanas formula.

11. klase

11.1. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ dalās ar 17.

1. atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $6^2+19^1-2^2=51$, kas dalās ar 17.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n=k$, tas ir, $6^{2k}+19^k-2^{k+1}$ dalās ar 17.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī, ja $n=k+1$, tas ir, $6^{2k+2}+19^{k+1}-2^{k+2}$ dalās ar 17.

Pārveidojam izteiksmi:

$$6^{2k+2}+19^{k+1}-2^{k+2}=36\cdot 6^{2k}+19\cdot 19^k-2\cdot 2^{k+1}=$$
$$=\underbrace{19\cdot(6^{2k}+19^k-2^{k+1})}_{\vdots 17}+\underbrace{17\cdot 6^{2k}}_{\vdots 17}+\underbrace{17\cdot 2^{k+1}}_{\vdots 17}.$$

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 17, tad arī summa dalās ar 17.

Secinājums. Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n=1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n=k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n=k+1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

2. atrisinājums. Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 17:

$$6^{2n}+19^n-2^{n+1}\equiv 36^n+19^n-2\cdot 2^n\equiv 2^n+2^n-2\cdot 2^n\equiv 0 \pmod{17}.$$

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Pārbaudīta indukcijas bāze	1
Uzrakstīts induktīvais pieņēmums	1
Uzrakstīts, kas jāpierāda (induktīvā pāreja)	1
Pierādīta induktīvā pāreja (tas ir, ka $6^{2k+2}+19^{k+1}-2^{k+2}$ dalās ar 17)	6
Secināts, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām n vērtībām	1
2. atrisinājums	
Par ideju, ka jāapskata izteiksme pēc moduļa 17	1
Iegūts, ka $6^{2n}\equiv 2^n \pmod{17}$	2
Iegūts, ka $19^n\equiv 2^n \pmod{17}$	2
Uzrakstīts, ka $2^{n+1}=2\cdot 2^n$	1
Pamatots, ka $6^{2n}+19^n-2^{n+1}\equiv 0 \pmod{17}$	4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	9	29	40	30	76	56	12	14	12	35	81	91
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,67								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir standartuzdevums par matemātiskās indukcijas metodi (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par matemātiskās indukcijas metodi,
2) indukcijas bāzes pārbaude,
3) induktīvā pieņēmuma uzrakstīšana,
4) induktīvās pārejas veikšana,
5) ekvivalentu pārveidojumu veikšana.

11.2. Bezgalīgas augošas aritmētiskās progresijas locekļi ir naturāli skaitļi. Pierādīt, ka tajā ir tāds loceklis, kurā desmit cipari pēc kārtas ir piecinieki.

Atrisinājums. Apzīmējam aritmētiskās progresijas diferenci ar d un izvēlēsimies tādu naturālu skaitli n, kuram $d < 10^n$. Aplūkojam 10^n pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, no kuriem pirmais sākas ar m piecinieku un beidzas n nullēm un $m \geq 10$ ir izvēlēts tāds, lai šis pirmais skaitlis būtu lielāks nekā mūsu aritmētiskās progresijas pirmais loceklis:

$$\underbrace{5555\ldots555}_{m\text{ piecinieki}}\underbrace{00\ldots00}_{n\text{ nulles}};\quad 5\ldots500\ldots01;\quad 5\ldots500\ldots02;\quad \ldots,\quad 5\ldots599\ldots98;\quad 5\ldots599\ldots99.$$

Tā kā šie ir vairāk nekā d pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, tad vismaz viens no tiem piederēs dotajai aritmētiskajai progresijai, un tajā ir vismaz 10 piecinieki pēc kārtas.

Vērtēšanas kritēriji

Par atsevišķiem piemēriem	Ne vairāk kā 4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	35	247	117	19	18	24	4	1	4	5	0	11
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,13								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) aritmētikās progresijas definīcija,
2) vispārīga algoritma izveidošana.

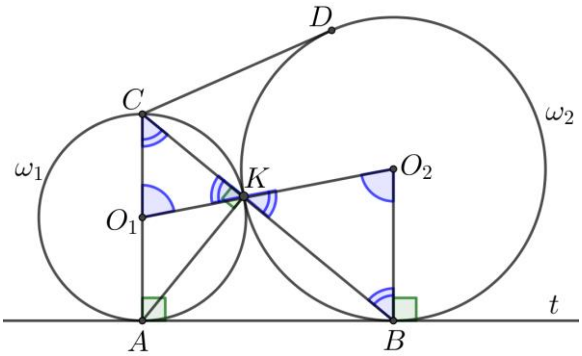
11.3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 ārēji pieskaras. Taisne t pieskaras ω_1 punktā A, bet ω_2 – punktā B. Ir novilkts ω_1 diametrs AC un no punkta C – pieskare CD pret ω_2 (D – pieskaršanās punkts). Pierādīt, ka $AC = CD$!

1. atrisinājums. Ar O_1 un O_2 apzīmējam attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centrus, bet ar K – riņķa līniju pieskaršanās punktu (skat. 105. att.). Tā kā $AC \perp AB$ un $BO_2 \perp AB$, tad $\sphericalangle BO_2K = \sphericalangle CO_1K$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AC un BO_2. Tad arī $\sphericalangle BKO_2 = \sphericalangle CKO_1$ kā vienādsānu trijstūru CO_1K un BO_2K leņķi pie pamata trijstūros ar vienādiem virsotnes leņķiem. Tātad punkts K ir nogriežņa BC iekšējs punkts.

Tā kā AC ir diametrs, tad $\sphericalangle CKA = 90°$ un pēc Eiklīda teorēmas taisnleņķa trijstūrī CAB iegūstam, ka $AC^2 = CK \cdot CB$.

Pēc pieskares-sekantes īpašības iegūstam, ka $CD^2 = CK \cdot CB$.

Tātad $AC^2 = CD^2$ un līdz ar to $AC = CD$.



105. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam $O_1A = O_1C = r$ un $O_2B = O_2D = R$, kur O_1 un O_2 ir attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centri (skat. 106. att.). Novelkam $O_1E \perp O_2B$ un $O_2F \perp O_1C$, kur $E \in O_2B$ un $F \in O_1C$. Tā kā $O_1O_2 = r + R$ un $O_2E = R - r$, tad pēc Pitagora teorēmas ΔO_1EO_2 iegūstam

$$O_1E^2 = (O_1O_2)^2 - O_2E^2 = (r+R)^2 - (R-r)^2 = 4Rr.$$

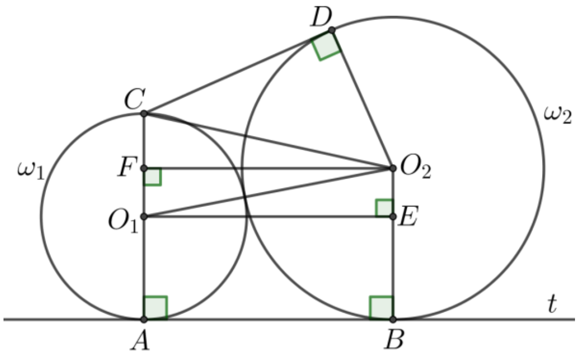
Ievērojam, ka $AB^2 = O_1E^2 = O_2F^2 = 4Rr$ un $O_2E = FO_1 = R - r$. Tātad $CF = CO_1 - FO_1 = r - (R - r) = 2r - R$ un pēc Pitagora teorēmas ΔCFO_2 iegūstam

$$O_2C^2 = CF^2 + O_2F^2 = (2r - R)^2 + 4Rr = 4r^2 + R^2.$$

Apskatām ΔCDO_2

$$CD^2 = O_2C^2 - O_2D^2 = 4r^2 + R^2 - R^2 = 4r^2.$$

Līdz ar to $CD = 2r$ un $AC = 2 \cdot O_1A = 2r$, un esam pierādījuši, ka $AC = CD$.



106. att.

Vērtēšanas kritēriji

1. atrisinājums	
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Pamato, ka punkts K ir nogriežņa BC iekšējs punkts	4
Iegūst, ka $AC^2 = CK \cdot CB$	3
Iegūst, ka $CD^2 = CK \cdot CB$	2
Secina, ka $AC = CD$	1
2. atrisinājums	
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Izsaka nogriežņus O_1A un O_2B ar doto riņķa līniju rādiusiem	1
Novelk O_1E un O_2F	1
Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī O_1EO_2 iegūst, ka $O_1E^2 = 4Rr$	2
Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī CFO_2 iegūst, ka $O_2C^2 = 4r^2 + R^2$	2
Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī CDO_2 iegūst, ka $CD^2 = 4r^2$	2
Secina, ka $AC = CD$	2

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	17	313	75	42	16	7	1	2	0	2	0	10
Vidēji iegūtais punktu skaits			0,79									

Skaidrojums par uzdevumu

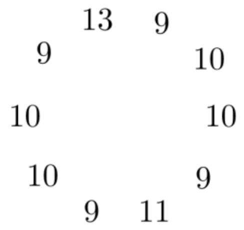
Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) leņķi pie paralēlām taisnēm,
2) Eiklīda teorēma,
3) pieskares-sekantes īpašība,
4) Pitagora teorēma.

11.4. Pa apli uzrakstīti 10 naturāli skaitļi, kuru summa ir 100. Zināms, ka jebkuru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir vismaz 29. Kādu lielāko vērtību var pieņemt lielākais no šiem desmit skaitļiem?

Atrisinājums. Lielākais no šiem skaitļiem var būt 13, tad skaitļi var būt izvietoti, piemēram, kā parādīts 107. att. Pierādīsim, ka lielākais skaitlis nevar būt lielāks kā 13. Apzīmējam lielāko skaitli ar a un pārējos 9 skaitļus sadalām trīs trijniekos. Skaitļu summa katrā trijniekā ir vismaz 29, tāpēc $a \leq 100 - 3 \cdot 29 = 13$.



107. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par atbildi, ka lielākais no skaitļiem var būt 13	2
Par pareizu piemēru	3
Par pamatojumu, ka lielāks skaitlis nevar būt	5

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	9	130	29	22	32	17	84	43	35	20	14	50
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,09								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) pamatojums, ka atrastā vērtība ir lielākā iespējamā.

11.5. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $n^3 = (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3$.

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto vienādojumu:

$$n^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 - 9n^2 + 27n - 27;$$
$$2n^3 - 18n^2 + 42n - 36 = 0;$$
$$n^3 - 9n^2 + 21n - 18 = 0.$$

Ievērojam, ka $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$, tātad $n = 6$ ir dotā vienādojuma sakne un vienādojumu $n^3 - 9n^2 + 21n - 18 = 0$ var pārveidot formā (izdalot polinomu ar binomu $(n-6)$):

$$(n-6)(n^2 - 3n + 3) = 0.$$

Vienādojumam $n^2 - 3n + 3 = 0$ nav veselu sakņu, jo $D = 9 - 12 < 0$.

Piezīme. Tā kā vienādojuma veselās saknes var būt tikai brīvā locekļa dalītāji, tad var pārbaudīt visas iespējamās vērtības $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 18$.

Vērtēšanas kritēriji

Par sakni $n = 6$	2
Par pamatojumu, ka citu sakņu nav	8

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	120	54	109	50	18	20	14	12	15	8	58
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,21								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) saīsinātās reizināšanas formula $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
2) polinoma sadalīšana reizinātājos,
3) polinoma ar veseliem koeficientiem veselo iespējamo sakņu pārbaude.

12. klase

12.1. Virkne (x_n) definēta rekurenti: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -29$ un $x_{n+3} = 9x_{n+2} - 26x_{n+1} + 24x_n$ visiem naturāliem n. Pierādīt, ka $x_n = 2^n + 3^n - 4^n$ visiem naturāliem n.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $x_1 = 2^1 + 3^1 - 4^1 = 1$. Ja $n = 2$, tad $x_2 = 2^2 + 3^2 - 4^2 = -3$. Ja $n = 3$, tad $x_3 = 2^3 + 3^3 - 4^3 = -29$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka formula ir spēkā, ja $n = k$, $n = k+1$ un $n = k+2$, tas ir,

$$x_k = 2^k + 3^k - 4^k\,, \qquad x_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1} - 4^{k+1} \quad \text{un} \quad x_{k+2} = 2^{k+2} + 3^{k+2} - 4^{k+2}.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka formula ir spēkā arī tad, ja $n = k+3$, tas ir, $x_{k+3} = 2^{k+3} + 3^{k+3} - 4^{k+3}$.

Izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūstam

$$x_{k+3} = 9x_{k+2} - 26x_{k+1} + 24x_k = 9(2^{k+2} + 3^{k+2} - 4^{k+2}) - 26(2^{k+1} + 3^{k+1} - 4^{k+1}) +$$
$$+24(2^k + 3^k - 4^k) = 2^k(9 \cdot 4 - 26 \cdot 2 + 24) + 3^k(9 \cdot 9 - 26 \cdot 3 + 24) -$$
$$-4^k(9 \cdot 16 - 26 \cdot 4 + 24) = 2^k \cdot 8 + 3^k \cdot 27 - 4^k \cdot 64 = 2^{k+3} + 3^{k+3} - 4^{k+3}.$$

Secinājums. Tā kā formula ir patiesa, ja $n = 1$, $n = 2$ un $n = 3$, un no tā, ka formula ir spēkā, ja $n = k$, $n = k+1$ un $n = k+2$, izriet, ka formula ir spēkā arī $n = k+3$, secinām, ka formula ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

Vērtēšanas kritēriji

Pārbaudīta indukcijas bāze ($n = 1;\ n = 2;\ n = 3$)	1
Uzrakstīts induktīvais pieņēmums	1
Uzrakstīts, kas jāpierāda (induktīvā pāreja)	1
Pierādīta induktīvā pāreja (tas ir, ka $x_{k+3} = 2^{k+3} + 3^{k+3} - 4^{k+3}$)	6
Secināts, ka formula ir patiesa visām naturālām n vērtībām	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	16	77	52	21	18	5	10	27	14	21	26	133
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,47								

Skaidrojums par uzdevumu

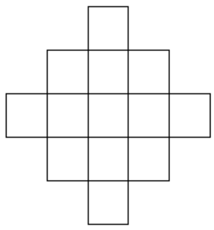
Matemātikas apakšnozare – algebra.

Uzdevums ir standartuzdevums par matemātiskās indukcijas metodi (skat. teoriju pielikumā).

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par matemātiskās indukcijas metodi,
2) izpratne par rekurenti definētu virkni,
3) indukcijas bāzes pārbaude,
4) induktīvā pieņēmuma uzrakstīšana,
5) induktīvās pārejas veikšana,
6) ekvivalentu pārveidojumu veikšana.

12.2. a) Parādi vienu veidu, kā 108. att. figūras katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli tā, lai jebkurā taisnstūrī 1×3 vai 3×1 ierakstīto skaitļu summa būtu 2020 un arī visu trīspadsmit ierakstīto skaitļu summa būtu 2020. **b)** Parādi, kā prasīto izdarīt, lai figūrā būtu ierakstīti pēc iespējas vairāk dažādi skaitļi!



108. att.

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 109. att., kur figūras labajā pusē norādītas atbilstošajā rindā esošo skaitļu summas, visu figūrā ierakstīto skaitļu summa ir $3S + S + 0 + S - 4S = S$, kur $S = 2020$.

b) Lielākais atšķirīgo skaitļu skaits ir 9, piemēram, skat. 109. att., kur $S = 2020$. Pamatosim, ka vairāk atšķirīgu skaitļu nevar ierakstīt. Apskatām rindu, kurā ir ierakstīti pieci skaitļi (skat. 110. att.). Tā kā $a + b + c = 2020$ un $b + c + d = 2020$, tad $a = d$ un simetrijas dēļ $b = e$. Tātad šajā rindā ir ierakstīti lielākais trīs atšķirīgi skaitļi. Arī kolonnā, kurā ir ierakstīti pieci skaitļi, lielākais trīs no tiem var būt dažādi. Tātad lielākais atšķirīgo skaitļu skaits ir $13 - 4 = 9$, jo pavisam ir 13 skaitļi un vismaz 4 ir vienādi ar kādu citu.

		$3S$			$3S$
	$10S$	$-4S$	$-5S$		S
0	$-S$	$2S$	0	$-S$	0
	$-8S$	$3S$	$6S$		S
		$-4S$			$-4S$

109. att.

a	b	c	d	e

110. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par a) gadījumu (kopā 5 punkti)	
Parādīts pareizs piemērs (der arī atsauce uz b) gadījuma piemēru)	4
Parāda, ka piemērs apmierina visas uzdevuma prasības	1
Par b) gadījumu (kopā 5 punkti)	
Parādīts pareizs piemērs, kurā ierakstīti 9 dažādi skaitļi	1
Parāda, ka piemērs apmierina visas uzdevuma prasības	1
Pamato, ka nevar būt ierakstīti vairāk kā 9 atšķirīgi skaitļi	3

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	23	141	50	17	7	31	71	20	10	7	8	35
Vidēji iegūtais punktu skaits			3,15									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare –

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) pamatojums, ka atrasts lielākais iespējamais dažādo skaitļu skaits.

12.3. Dots trijstūris ABC, kurā $\sphericalangle A < \sphericalangle C$. Uz malas BC pagarinājuma izvēlēts punkts D tā, ka B atrodas starp C un D un $BD = AB$. Uz leņķa ABC bisektrises izvēlēts punkts E tā, ka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACB$. Nogriežņi BE un AC krustojas punktā F. Taisne, kas novilkta caur punktu E paralēli CD, krusto nogriezni AD punktā G. Pierādīt, ka $AG = BF$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $\Delta ABF = \Delta EGA$ (skat. 111. att.).

Tā kā pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle CBF = \sphericalangle FBA$ un pēc dotā $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACB$, tad $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BEA$. Tātad $\sphericalangle BEA = \sphericalangle BFC = \sphericalangle AFE$, tāpēc ΔFAE ir vienādsānu trijstūris un $\boldsymbol{AE = AF}$.

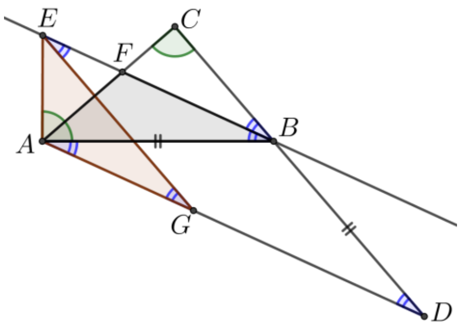
Ievērojam, ka $\sphericalangle EGA = \sphericalangle CDA$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm EG un CD. Tā kā trijstūris ABD ir vienādsānu, tad $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BAD$. Ievērojam, ka $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BDA$ kā trijstūra ABD ārējais leņķis, tātad $\sphericalangle 2FBA = 2\sphericalangle BAD$ jeb $\sphericalangle BAD = \sphericalangle FBA$. Līdz ar to $\sphericalangle EGA = \sphericalangle ABF$.

Izmantojot, ka $\sphericalangle AFB$ ir trijstūra FCB ārējais leņķis, iegūstam

$$\sphericalangle \boldsymbol{AFB} = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBF = \sphericalangle EAB + \sphericalangle BAD = \sphericalangle \boldsymbol{EAG}.$$

Tā kā $\sphericalangle EGA = \sphericalangle ABF$ un $\sphericalangle EAG = \sphericalangle AFB$, tad arī $\sphericalangle \boldsymbol{AEG} = \sphericalangle \boldsymbol{FAB}$.

Tātad $\Delta ABF = \Delta EGA$ pēc pazīmes $\ell m \ell$ un $AG = BF$ kā atbilstošās malas.



111. att.

Vērtēšanas kritēriji

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Pamato, ka $AE = AF$	2
Pamato, ka $\sphericalangle EGA = \sphericalangle ABF$	3
Pamato, ka $\sphericalangle AFB = \sphericalangle EAG$	2
Pamato, ka $\sphericalangle AEG = \sphericalangle FAB$	1
Secina, ka $\Delta ABF = \Delta EGA$ pēc pazīmes $\ell m \ell$	1
Secina, ka $AG = BF$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros	1

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	23	164	58	38	29	29	5	6	7	6	6	49
Vidēji iegūtais punktu skaits			2,62									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūru vienādības pazīmes,
2) leņķu izteikšana,
3) leņķi pie paralēlām taisnēm,
4) trijstūra ārējais leņķis.

12.4. Debesskrāpī, kurā strādā profesors Cipariņš, ir 500 stāvi un tā liftā ir neparasta vadības pults: tajā var ievadīt naturālu skaitli n, kas nepārsniedz 100, nospiest pogu <uz augšu> vai < uz leju> un lifts brauks n stāvus attiecīgi uz augšu vai uz leju. Tā, piemēram, parasti profesors Cipariņš, lai aizbrauktu no 1. stāva uz savu kabinetu 314. stāvā, brauc uz augšu trīs reizes pa 100 stāviem, un tad vienu reizi 13 stāvus uz augšu.

Diemžēl šorīt izrādījās, ka lifts ir salūzis, un reizēm tas brauc nepareizā virzienā, tas ir, var gadīties, ka tā vietā, lai brauktu n stāvus uz augšu, tas aizbrauc n stāvus uz leju (un otrādi). Parādiet, kā ar salūzušo liftu profesors Cipariņš var nokļūt no 1. stāva uz savu kabinetu 314. stāvā, ja zināms, ka lifts nekad neaizbrauc nepareizi 7 reizes pēc kārtas, tas ir, ja tas ir sešas reizes pēc kārtas kļūdījies, tad septītajā tas noteikti aizbrauks pareizajā virzienā.

Piezīme. Lifts nebrauc zemāk par 1. un augstāk par 500. stāvu. Ja, piemēram, tam jābrauc no 3. stāva 5 stāvus uz leju, tas aizbrauc līdz 1. stāvam un tur apstājas.

Atrisinājums. Vispirms ar liftu vajag uzbraukt 100 stāvus uz augšu līdz 101. stāvam, to var izdarīt atkārtoti ievadot $n = 100$ un spiežot <uz augšu>, vismaz vienā no pirmajām septiņām reizēm tas brauks uz augšu.

Tālāk parādīsim, kā ar šo liftu var uzbraukt 1 stāvu uz augšu. Tad, šo atkārtoti izmantojot, varēsim nokļūt līdz jebkuram stāvam.

Ievadīsim 1 un nospiedīsim <uz augšu>:

- ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt.
- ja nē, tad tas nobrauks 1 stāvu uz leju, un tad ievadīsim 2 un nospiedīsim <uz augšu>:
  - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
  - ja nē, tad tas nobrauks 2 stāvus uz leju (kopā jau esam 3 stāvus uz leju), un tad ievadīsim 4 un nospiedīsim <uz augšu>:
    - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
    - ja nē, tad tas nobrauks 4 stāvus uz leju (kopumā jau esam 7 stāvus uz leju), un tad ievadīsim 8 un nospiedīsim <uz augšu>:
      - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
      - ja nē, tad tas nobrauks 8 stāvus uz leju (kopumā jau esam 15 stāvus uz leju), un tad ievadīsim 16 un nospiedīsim <uz augšu>:
        - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
        - ja nē, tad tas nobrauks 16 stāvus uz leju (kopumā jau esam 31 stāvu uz leju), un tad ievadīsim 32 un nospiedīsim <uz augšu>:
          - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
          - ja nē, tad tas nobrauks 32 stāvus uz leju (kopumā jau esam 63 stāvus uz leju), un tad ievadīsim 64 un nospiedīsim <uz augšu>. Tā kā iepriekšējās 6 reizes lifts ir aizbraucis pretējā virzienā, tad tagad tas noteikti brauks uz augšu un mēs nokļūsim tieši vienu stāvu uz augšu no sākotnējā.

Vērtēšanas kritēriji

Par atsevišķiem piemēriem	Ne vairāk kā 4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	32	215	40	28	14	20	6	2	6	7	9	41
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,19								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) lifta darbības principa izpratne,
2) vispārīga algoritma izveidošana,
3) gadījumu šķirošana.

12.5. Zināms, ka naturāli skaitļi x un y ir tādi, ka x^2+y^2+1 dalās ar 13. Pierādīt: **a)** x^2-y^2 nedalās ar 13, **b)** tieši viens no skaitļiem x^4, y^4, x^4+y^4+1 dalās ar 13.

Atrisinājums. Apskatām, kādi atlikumi rodas, ja naturāla skaitļa kvadrātu dala ar 13.

$n \pmod{13}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n^2 \pmod{13}$	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

Tā kā pēc dotā x^2+y^2+1 dalās ar 13, tad secinām, ka $x^2+y^2=12 \pmod{13}$. Ievērojam, ka ir tikai divi skaitļa kvadrātu atlikumu pāri, kas summā dod 12, tie ir $(0;12)$ vai $(3;9)$.

a) Apskatot abus gadījumus, redzams, ka nevienā no tiem x^2-y^2 nedalās ar 13.

b) Apskatām abus gadījumus.

- Ja atlikumu pāris ir $(0;12)$, tad tieši viens (tas skaitlis, kurš dod atlikumu 0) no skaitļiem x^4 vai y^4 dalās ar 13, bet otrs nedalās, un $x^4+y^4+1 \equiv 0+12^2+1 \equiv (-1)^2+1 \equiv$ $\equiv 2\ (mod\ 13)$, tātad šajā gadījumā tieši viens no skaitļiem x^4, y^4, x^4+y^4+1 dalās ar 13.
- Ja atlikumu pāris ir $(3;9)$, tad $x^4 \equiv 3^2 \equiv 9\ (mod\ 13)$ un $y^4 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 3\ (mod\ 13)$, bet tādā gadījumā $x^4+y^4+1 \equiv 3+9+1 \equiv 0\ (mod\ 13)$, līdz ar to tieši viens no skaitļiem x^4, y^4, x^4+y^4+1 dalās ar 13.

Vērtēšanas kritēriji

Uzraksta, kādi atlikumi rodas, ja naturāla skaitļa kvadrātu dala 13	2
Secina, ka $x^2+y^2=12 \pmod{13}$	1
Secina, ka ir tikai divi skaitļa kvadrātu atlikumu pāri, kas summā dod 12	1
a) gadījums – pamato, ka nevienā no abiem gadījumiem x^2-y^2 nedalās ar 13.	2
b) gadījums – par katru gadījumu (tas ir, ka prasītais izpildās, ja ir atlikumu pāris $(0;12)$ un $(3;9)$)	4

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	35	228	61	16	17	3	6	8	0	6	4	36
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,76								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par atlikumu,
2) darbības ar kongruencēm,
3) gadījumu šķirošana.

9.1. Kādām naturālām n vērtībām izteiksmes $\frac{(3n-1)(n+4)}{n+2}$ vērtība ir vesels skaitlis?

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi:

$$\frac{(3n-1)(n+4)}{n+2}=\frac{3n^2+11n-4}{n+2}=\frac{3n(n+2)+5n-4}{n+2}=\frac{3n(n+2)}{n+2}+\frac{5(n+2)-14}{n+2}=$$
$$=3n+5-\frac{14}{n+2}.$$

Tā kā $3n+5$ ir naturāls skaitlis, tad dotās izteiksmes vērtība būs vesels skaitlis tikai tad, ja $\frac{-14}{n+2}$ ir vesels skaitlis, bet tas iespējams, ja $(n+2)$ ir skaitļa 14 dalītājs. Ievērojot, ka n ir naturāls, iegūstam, ka $n+2=7$ vai $n+2=14$, no kā iegūstam, ka $n=5$ vai $n=12$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	0	22	2	39	1	12	0	1	1	1	1	9
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,82								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ekvivalentu pārveidojumu veikšana,
2) veselās daļas atdalīšana daļveida izteiksmei,
3) skaitļa dalītāju atrašana.

9.2. Atrast visus naturālos skaitļus B intervālā $1<B<99$, kuriem izpildās šāda īpašība: jebkuram naturālam skaitlim C, kuram $B<C<100$ ir spēkā $B\leq V\leq C$, kur $V=\frac{1+B+C+100}{4}$ ir skaitļu 1, B, C, 100 vidējais aritmētiskais.

Atrisinājums. Pēc dotā $1<B<C<100$. Tā kā $B<C$, tad var pieņemt, ka $C=B+x$, kur $1\leq x\leq 99-B$. Līdz ar to iegūstam, ka četru doto skaitļu vidējais aritmētiskais ir

$$V=\frac{1+B+B+x+100}{4}=\frac{2B+x+101}{4}.$$

Ņemot vērā, ka jāizpildās nevienādībām $B\leq V\leq C$, iegūstam

$$B\leq\frac{2B+x+101}{4}\leq B+x;$$
$$4B\leq 2B+x+101\leq 4B+4x.$$

Pārrakstot iegūto divkāršo nevienādību kā nevienādību sistēmu, iegūstam

$$\begin{cases}4B\leq 2B+x+101\\ 2B+x+101\leq 4B+4x\end{cases}\quad\text{jeb}\quad\begin{cases}2B\leq 101+x\\ 2B\geq 101-3x\end{cases}.$$

Ievērojam, ja nevienādība izpildās ja $x=1$, tad tā izpildās arī lielākiem x. Tāpēc tas, ka šī nevienādība izpildās visiem $x\geq 1$ ir ekvivalents apgalvojumam, ka tā izpildās pie $x=1$. Tātad

$$\begin{cases}2B\leq 102\\ 2B\geq 98\end{cases}\quad\text{jeb}\quad\begin{cases}B\leq 51\\ B\geq 49\end{cases}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka jebkurai derīgai C vērtībai ir spēkā sakarība $B\leq V\leq C$, ja B ir 49, 50 vai 51.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	15	25	7	1	3	5	3	5	2	7	9
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,67								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

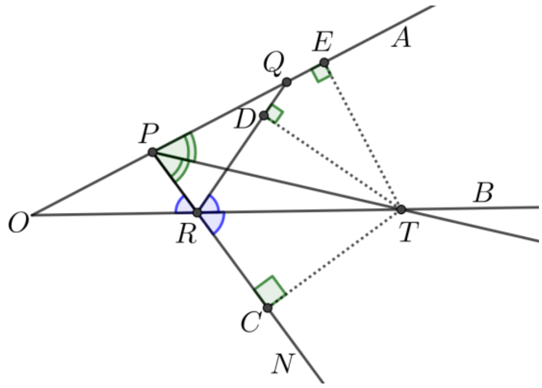
1) izteiksmju novērtēšana,
2) nevienādību sistēmas sastādīšana un atrisināšana.

9.3. Punkts R atrodas uz stara OB un punkti P un Q atrodas uz stara OA tā, ka $OP < OQ$ un $\sphericalangle ORP = \sphericalangle BRQ$. Leņķa RPA bisektrise krusto staru OB punktā T. Pierādīt, ka QT ir $\sphericalangle RQA$ bisektrise!

Atrisinājums. Pagarinām nogriezni PR, tad $\sphericalangle ORP = \sphericalangle NRB$ kā krustleņķi (skat. 112. att.) un līdz ar to arī $BRQ = \sphericalangle NRB$. Izmantojot bisektrises īpašību, iegūstam, ka punkts T atrodas vienādā attālumā no

- leņķa NRQ malām NR un RQ, tas ir, $TC = TD$;
- leņķa QPR malām PR un PQ, tas ir, $TC = TE$.

Tātad $TD = TE$ un esam ieguvuši, ka punkts T atrodas vienādā attālumā no leņķa RQA malām. Līdz ar to pēc bisektrises pazīmes esam ieguvuši, ka punkts T atrodas uz $\sphericalangle RQA$ bisektrises jeb QT ir $\sphericalangle RQA$ bisektrise.



112. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	14	64	6	1	0	0	0	0	0	0	0	4
Vidēji iegūtais punktu skaits			0,64									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) bisektrises īpašība,
2) bisektrises pazīme.

9.4. Vai eksistē tādi četri dažādi **a)** naturāli skaitļi, **b)** pirmskaitļi a, b, c, d, ka vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:

- $b + c + d$ dalās ar a,
- $c + d + a$ dalās ar b,
- $d + a + b$ dalās ar c,
- $a + b + c$ dalās ar d?

Atrisinājums. a) Jā, eksistē. Skaitļiem 1, 2, 3, 6 izpildās visi uzdevuma nosacījumi:

- $2 + 3 + 6$ dalās ar 1,
- $1 + 3 + 6$ dalās ar 2,
- $1 + 2 + 6$ dalās ar 3,
- $1 + 2 + 3$ dalās ar 6.

b) Nē, neeksistē. Ievērojam, ka

- $a + (b + c + d)$ dalās ar a (jo abi saskaitāmie dalās ar a),
- $b + (c + d + a)$ dalās ar b,
- $c + (d + a + b)$ dalās ar c,
- $d + (a + b + c)$ dalās ar d.

Tā kā a, b, c, d ir pirmskaitļi, tad $a + b + c + d$ dalās ar $abcd$, no kā izriet, ka $a + b + c + d \geq abcd$. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $a \leq b \leq c \leq d$. Tādā gadījumā $a + b + c + d \leq 4d < abcd$, jo pat trīs mazāko atšķirīgo pirmskaitļu reizinājums $2 \cdot 3 \cdot 5 > 4$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad neeksistē tādi četri dažādi pirmskaitļi, kuriem izpildās visi uzdevuma nosacījumi.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	8	2	0	1	54	10	4	3	2	2	0
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,07								

Skaidrojums par uzdevumu

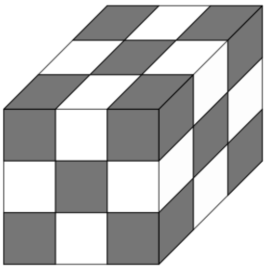
Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

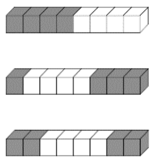
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) vispārīgs pamatojums, ka prasītais nav iespējams,
3) pirmskaitļa definīcija,
4) summas novērtēšana.

9.5. Vai kubu ar izmēriem $12 \times 12 \times 12$ iespējams salikt no ķieģeļiem, kuru izmēri ir $1 \times 1 \times 8$?

Atrisinājums. Pamatosim, ka prasīto nevar izdarīt. Sadalām kubu 9 mazākos kubos, kuru izmēri ir $4 \times 4 \times 4$, un iekrāsojam tos kā šaha galdiņu (skat. 113. att.). Pavisam ir $64 \cdot 14 = 896$ melni un $64 \cdot 13 = 832$ balti kubiņi ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$. Tā kā katrs ķieģelis pārklāj 4 melnus un 4 baltus kubiņus ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$ (skat. 114. att.), tad, ja no šiem ķieģeļiem būtu salikts kubs, tas saturētu vienāda skaita melnos un baltos kubiņus ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$, bet $896 \neq 832$.


113. att.


114. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	13	47	16	5	1	1	0	0	0	0	3
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,55								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) vispārīgs pamatojums, ka prasītais nav iespējams,
2) invariantu metode – krāsošana.

10.1. Pierādīt, ka skaitlim $2019^3 + 2020^3 + 2021^3$ ir vismaz 20 dažādi pozitīvi dalītāji!

Atrisinājums. Apzīmējam $n = 2020$ un pārveidojam doto skaitli:

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3\cdot n^2 + 3\cdot n - 1 + n^3 + n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1 =$$
$$= n\cdot(3n^2+6) = n\cdot 3\cdot(n^2+2) = 2^2\cdot 5\cdot 101\cdot 3\cdot(2020^2+2).$$

Tā kā naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$, kur p_i ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_m+1)$ dažādi naturālie dalītāji, tad dotajam skaitlim ir vismaz $(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 24$ dažādi dalītāji, pat neņemot vērā reizinātāju 2020^2+2. Patiesībā dotajam skaitlim ir 640 dažādi dalītāji.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	5	3	4	0	2	1	2	6	0	2	37
Vidēji iegūtais punktu skaits				7,52								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) dalītāju atrašana,
2) dalītāju skaita noteikšana,
3) sadalīšana pirmreizinātājos.

10.2. Zināms, ka $x^2 + y^2 + xy = 3$. Kāda var būt $x + y$ vērtība?

1. atrisinājums. Pamatosim, ka $x^2 + y^2 + xy \ge \frac{3}{4}(x+y)^2$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + y^2 + xy \ge \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{4}y^2$$
$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy \ge 0$$
$$x^2 + y^2 - 2xy \ge 0$$
$$(x-y)^2 \ge 0.$$

Tā kā iegūta patiesa nevienādība, tad arī dotā nevienādība ir patiesa. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $3 \ge \frac{3}{4}(x+y)^2$ jeb $4 \ge (x+y)^2$, tātad $-2 \le x + y \le 2$.

Vēl jāparāda, ka visām vērtībām šajā intervālā ir atbilstošas x un y vērtības. Apzīmējam $x + y = t$ $(-2 \le t \le 2)$. No dotās vienādības iegūstam

$$x^2 + 2xy + y^2 - xy = 3 \quad\Rightarrow\quad xy = (x+y)^2 - 3 \quad\Rightarrow\quad xy = t^2 - 3.$$

Sastādām kvadrātvienādojumu $a^2 - ta + t^2 - 3 = 0$, kura sakņu summa ir $a_1 + a_2 = t$ un sakņu reizinājums ir $a_1a_2 = t^2 - 3$. Ja šim vienādojumam ir atrisinājums dotai t vērtībai, tad tā saknes ir meklētās x un y vērtības. Aprēķinām diskriminantu $D = (-t)^2 - 4\cdot 1\cdot(t^2-3) = 12 - 3t^2$, tā kā $-2 \le t \le 2$, tad $t^2 \le 4$, tātad visām pieļaujamajām t vērtībām $D \ge 0$. Tātad $-2 \le x + y \le 2$.

2. atrisinājums. Apzīmējam $x = u + v$ un $y = u - v$. Ievietojot apzīmējumus dotajā vienādībā, iegūstam

$$(u+v)^2 + (u-v)^2 + (u+v)(u-v) = 3$$
$$u^2 + 2uv + v^2 + u^2 - 2uv + v^2 + u^2 - v^2 = 3$$
$$3u^2 + v^2 = 3.$$

Lai pēdējā vienādība būtu patiesa, tad $-1 \le u \le 1$. Tā kā $x + y = (u+v) + (u-v) = 2u$, tad $-2 \le x + y \le 2$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	4	26	17	5	0	5	0	0	0	0	5
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,42								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

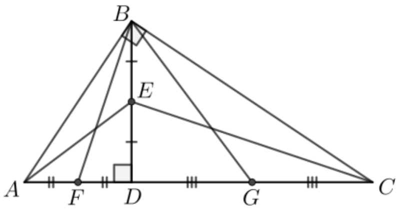
1) pilnā kvadrāta atdalīšana, lietojot saīsinātās reizināšanas formulu $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,
2) izteiksmes vērtības novērtēšana.

10.3. Taisnleņķa trijstūrī ABC, kurā $\sphericalangle ABC = 90°$, novilkts augstums BD, nogriežņa BD viduspunkts ir E. Punkti F un G ir attiecīgi nogriežņu AD un CD viduspunkti. Pierādīt, ka $\sphericalangle AEC + \sphericalangle FBG = 180°$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\Delta ABD \sim \Delta BDC$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = 90°$ un $\sphericalangle BAD = 90° - \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ (skat. 115. att.). Tātad trijstūru malas ir proporcionālas, tas ir, $\frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD}$. Tā kā $AD = 2FD$ un $BD = 2ED$, tad $\frac{BD}{CD} = \frac{FD}{ED}$. Līdz ar to $\Delta BDF \sim \Delta CDE$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tātad $\sphericalangle FBD = \sphericalangle DCE = 90° - \sphericalangle DEC$ jeb $\sphericalangle FBD + \sphericalangle DEC = 90°$.

Līdzīgi pierāda, ka $\sphericalangle GBD + \sphericalangle AED = 90°$.

Tātad $\sphericalangle AEC + \sphericalangle FBG = (\sphericalangle AED + \sphericalangle DEC) + (\sphericalangle FBD + \sphericalangle GBD) = 90° + 90° = 180°$.



115. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	3	12	6	12	0	3	0	0	1	1	1	25
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,18								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūru līdzības pazīmes,
2) leņķu izteikšana.

10.4. Aplūkojam skaitļu virkni 7; 737; 73737; 7373737; ..., kuras pirmais loceklis ir 7 un katru nākamo iegūst, iepriekšējam pierakstot galā 37. Pierādīt, ka neviens šīs virknes loceklis nedalās ar 17.

Atrisinājums. Apzīmējam virknes locekļus ar $s_0 = 7$, $s_1 = 737$, $s_2 = 73737$, …

Redzams, ka virknē ir spēkā sakarība $s_{k+1} = 100s_k + 37$. Patiešām, skaitli pareizinot ar 100 tam tiek galā pierakstītas divas nulles, bet pieskaitot 37 šīs nulles pārvēršas par 37, tātad šī operācija pieraksta skaitļa galā 37. Apzīmēsim ar a_k atlikumu virkni, kas rodas s_k dalot ar 17, $a_k = s_k \bmod 17$. Mums jāpierāda, ka virknē (a_k) nav nevienas nulles.

Arī virknes a_k katrs loceklis (tāpat kā virknei s_k) ir atkarīgs tikai no iepriekšējā

$$a_{k+1} = s_{k+1} \bmod 17 = 100s_k + 37 \bmod 17 = 15a_k + 3 \bmod 17.$$

Izmantojot šo formulu un to, ka $a_0 = 7 \bmod 17 = 7$, aprēķināsim virknes a_k pirmos locekļus.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k (mod 17)	7	6	8	4	12	13	11	15	7

Esam ieguvuši, ka $a_0 = a_8 = 7$. Tā kā šajā virknē katrs loceklis ir atkarīgs tikai no iepriekšējā, tad šī virkne būs periodiska ar periodu 8: no tā, ka $a_0 = a_8$, secinām, ka $a_1 = a_9$, tad $a_2 = a_{10}$ utt.

Tā kā starp pirmajiem 8 locekļiem šajā virknē nav nevienas nulles, tad, tā kā tā ir periodiska, tad arī tālāk tajā nebūs nevienas nulles.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	8	30	1	0	4	1	4	0	2	3	3	8
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,25								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) rekurences sakarības izveidošana,
2) darbības ar kongruencēm,
3) periodiskas atlikumu virknes iegūšana.

10.5. Dotas četras pēc ārējā izskata vienādas monētas, katras monētas masa ir 20 g vai 21 g. Kā noteikt katras monētas masu ar trīs svēršanām uz elektroniskajiem svariem, kas rāda uz svariem uzlikto monētu kopējo masu?

Atrisinājums. Apzīmējam monētas ar A, B, C, D. Pirmajā svēršanā uz svariem liekam A un B.

- Ja $A+B=40$ vai $A+B=42$, tad A un B masas jau zināmas, tās attiecīgi ir 20 g un 20 g vai 21 g un 21 g. Pēc tam ar divām svēršanām atrodam C un D masu.
- Ja $A+B=41$, tad otrajā svēršanā uz svariem liekam A un C.
  - Ja $A+C=40$ un $A+C=42$, tad zinām A un C masu, tātad arī B masu. Trešajā svēršanā uz svariem liekam D un nosakām tās masu.
  - Ja $A+C=41$, tad no tā, ka $A+B=A+C$, secinām, ka $B=C$. Trešajā reizē uz svariem liekam B, C un D. Ievērojam, ka $B+C$ ir pāra skaitlis (40 vai 42). Apskatot visus iespējamos svēršanas iznākumus, iegūstam katras monētas masu, skat. 116. att.

$B+C$	$B+C+D$	D	B	C	A
40	60	20	20	20	21
40	61	21	20	20	21
42	62	20	21	21	20
42	63	21	21	21	20

116. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	0	0	2	4	8	13	5	1	1	6	3	21
Vidēji iegūtais punktu skaits				6,39								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par svaru darbības principu,
2) vispārīga algoritma izstrāde,
3) visu gadījumu apskatīšana.

11.1. Dota funkcija $f(x) = mx^2 + (m-1)x + \frac{2020}{m-2019}$. Ar kādām parametra m vērtībām funkcija ir augoša intervālā $(1; 2)$?

1. atrisinājums. Ievērojam, ka $m \neq 2019$. Lai funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $f(1) < f(2)$. Atrisinām šo nevienādību:

$$m + (m-1) + \frac{2020}{m-2019} < 4m + (m-1) \cdot 2 + \frac{2020}{m-2019}$$
$$2m - 1 < 6m - 2$$
$$m > \frac{1}{4}.$$

Vēl jāgarantē, ka parabolas virsotne neatrodas intervālā $(1; 2)$. Tā kā m vērtības ir pozitīvas, tad parabolas zari ir vērsti uz augšu un, lai dotajā intervālā funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $x_v \leq 1$ jeb $\frac{1-m}{2m} \leq 1$. Reizinot nevienādību ar $2m > 0$, iegūstam $1 - m \leq 2m$ jeb $m \geq \frac{1}{3}$. Līdz ar to funkcija ir augoša intervālā $(1; 2)$, ja $m \in \left[\frac{1}{3}; 2019\right) \cup (2019; +\infty)$.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka $m \neq 2019$. Ja $m < 0$, tad parabolas virsotnes abscisa $x_v = \frac{1-m}{2m} < 0$, kas nozīmē, ka funkcija nav augoša dotajā intervālā. Ja $m = 0$, tad iegūstam $f(x) = -x - \frac{2020}{2019}$ un tā ir dilstoša funkcija. Ja $m > 0$, tad parabolas zari ir vērsti uz augšu un, lai dotajā intervālā funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $\frac{1-m}{2m} \leq 1$. Reizinot nevienādību ar $2m > 0$, iegūstam $1 - m \leq 2m$ jeb $m \geq \frac{1}{3}$. Līdz ar to funkcija ir augoša intervālā $(1; 2)$, ja $m \in \left[\frac{1}{3}; 2019\right) \cup (2019; +\infty)$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	5	6	3	3	5	6	0	3	6	12	10
Vidēji iegūtais punktu skaits				5,90								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par uzdevumu ar parametru,
2) funkcijas īpašības,
3) nevienādības sastādīšana un atrisināšana.

11.2. Aplūkojam virkni 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; ..., kurā katrs naturālais skaitlis k tiek atkārtots k reizes. Pierādīt, ka šīs virknes n-to locekli var aprēķināt pēc formulas $\left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$.

Ar $[x]$ apzīmējam skaitļa veselo daļu, tas ir, lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Piemēram, $[3{,}1] = 3$, $[17] = 17$, $[6{,}99] = 6$.

Atrisinājums. Katrs naturāls skaitlis k dotajā virknē atkārtojas k reizes, noskaidrosim, ar kādiem indeksiem (kurās pozīcijās) tas tajā parādās.

Pirms pirmā skaitļa k ir viens vieninieks, divi divnieki, trīs trijnieki, ..., $(k-1)$ skaitlis $(k-1)$, tātad kopā ir

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = \frac{k^2 - k}{2}$$

skaitļi. Tātad skaitlim k indeksi šajā virnē būs

$$\frac{k^2-k}{2} + 1;\ \frac{k^2-k}{2} + 2;\ \ldots;\ \frac{k^2-k}{2} + k,$$

jeb, citiem vārdiem, jebkurš skaitlis k šajā virknē parādās ar indeksu $\frac{k^2-k}{2} + i$, kur $1 \leq i \leq k$.

Lai pierādītu formulu, jāpierāda, ka visiem naturāliem k un visiem naturāliem $1 \leq i \leq k$ izpildās

$$\left[\sqrt{2\left(\frac{k^2-k}{2}+i\right)}+\frac{1}{2}\right]=k \quad \text{jeb} \quad \left[\sqrt{k^2-k+2i}+\frac{1}{2}\right]=k$$

Vienādība $[x]=y$, kur y ir naturāls skaitlis izpildās tad un tikai tad, ja $y \leq x < y+1$, tāpēc vienādība pārvēršas par divkāršo nevienādību

$$k \leq \sqrt{k^2-k+2i}+\frac{1}{2} < k+1$$

Atņemot $\frac{1}{2}$ un kāpinot kvadrātā, iegūstam

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \leq k^2-k+2i < \left(k+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{4} \leq 2i < 2k+\frac{1}{4}.$$

Redzams, ka pēdējā nevienādība ir patiesa visiem $1 \leq i \leq k$. Tā kā visi pārveidojumi bija ekvivalenti (kvadrātā tika kāpinātas pozitīvas izteiksmes), tad sākotnējā izteiksme arī ir spēkā.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	17	29	2	2	0	0	0	0	0	0	1	10
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,61								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) virknes veidošanas principa izpratne,
2) izpratne par skaitļa veselo daļu,
3) virknes locekļu indeksu novērtēšana,
4) nevienādības sastādīšana un pierādīšana.

11.3. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt, ka trijstūros ABC, BCD, CDA, DAB ievilkto riņķa līniju centri ir taisnstūra virsotnes!

Atrisinājums. Ja X un Y ir attiecīgi ΔABD un ΔABC ievilkto riņķa līniju centri (skat. 117. att.), tad AY un BY ir attiecīgi $\sphericalangle BAC$ un $\sphericalangle ABC$ bisektrises. Tātad

$$\sphericalangle AYB = 180° - (\sphericalangle BAY + \sphericalangle ABY) = 180° - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC) =$$

$$= \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Līdzīgi $\sphericalangle AXB = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle ADB$.

Tā kā $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, tad $\sphericalangle AYB = \sphericalangle AXB$. Tātad punkti A, X, Y, B atrodas uz vienas riņķa līnijas. Līdz ar to $\sphericalangle XYB = 180° - \sphericalangle XAB = = 180° - \frac{1}{2}\sphericalangle DAB$.

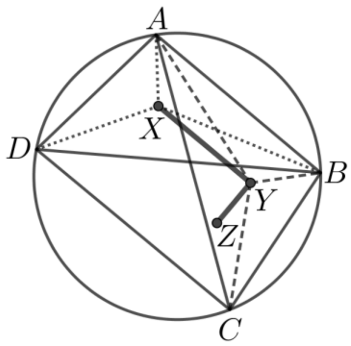
Ja Z ir ΔBCD ievilktās riņķa līnijas centrs, tad līdzīgi iegūstam, ka $\sphericalangle ZYB = 180° - \frac{1}{2}\sphericalangle DCB$.

Izmantojot šīs divas vienādības, iegūstam

$$\sphericalangle XYZ = 360° - \sphericalangle XYB - \sphericalangle ZYB = 360° - (180° - \frac{1}{2}\sphericalangle DAB) - (180° - \frac{1}{2}\sphericalangle DCB) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle DAB + \sphericalangle DCB) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°.$$

Līdzīgi pierāda, ka arī pārējie četrstūra leņķi ir taisni, tātad tas ir taisnstūris.



117. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	15	7	24	11	0	1	0	0	0	0	0	3
Vidēji iegūtais punktu skaits			1,74									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu krustpunktā,
2) leņķu izteikšana,
3) ievilkto leņķu īpašība,
4) taisnstūra pazīme.

11.4. Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas reālas saknes. Vai var gadīties, ka šīs saknes ir **a)** veseli skaitļi, **b)** racionāli skaitļi?

Atrisinājums. a) Nē, saknes nevar būt veseli skaitļi. Ievērojam, ka $c \neq 0$, jo pretējā gadījumā $\overline{abc}$ nav pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka 0 nav vienādojuma sakne. Ja $x \geq 0$, tad $ax^2 + bx + c \geq c > 0$. Tātad vienādojumam var būt tikai negatīvas saknes. Apzīmējot saknes ar $-x_1$, $-x_2$ un sadalot kreisās puses izteiksmi reizinātājos, iegūstam

$$ax^2 + bx + c = a(x + x_1)(x + x_2).$$

Pieņemsim, ka šīs saknes ir veseli skaitļi. Ja $x = 10$, tad iegūstam

$$a(10 + x_1)(10 + x_2) = 100a + 10b + c = \overline{abc}.$$

Tātad esam ieguvuši, ka $\overline{abc}$ ir salikts skaitlis, kas ir pretrunā ar doto. Līdz ar to vienādojumam nav veselu sakņu.

b) Nē, saknes nevar būt racionāli skaitļi. Pieņemsim pretējo, ka saknes vienādojumam ir racionālas, tas ir, $-\frac{p_1}{q_1}$ un $-\frac{p_2}{q_2}$, kur p_1, q_1 ir savstarpēji pirmskaitļi un arī p_2, q_2 ir savstarpēji pirmskaitļi. Sadalām vienādojuma kreiso pusi reizinātājos:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{p_1}{q_1}\right)\left(x + \frac{p_2}{q_2}\right) = \frac{a}{q_1 q_2}(q_1 x + p_1)(q_2 x + p_2).$$

Ievietojot $x = 10$, iegūstam

$$\frac{a}{q_1 q_2}(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2) = 100a + 10\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} = 100a + 10b + c = \overline{abc}$$

$$a(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2) = \overline{abc} \cdot q_1 q_2.$$

Pamatosim, ja kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ sakne ir $\frac{p}{q}$ (nesaīsināma daļa), tad a dalās ar q.

Ievietojam vienādojumā $ax^2 + bx + c = 0$ tā sakni $x = \frac{p}{q}$ un pārveidojam iegūto identitāti:

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$$

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

$$q(cq + bp) = -ap^2.$$

Tā kā pēdējās vienādības kreisā puse dalās ar q, tad arī labās puses izteiksmei jādalās ar q. Ņemot vērā, ka pēc pieņēmuma p un q ir savstarpēji pirmskaitļi, secinām, ka a ir jādalās ar q.

Līdz ar to secinām, ka q_i ir viencipara skaitlis, jo a ir cipars.

Analogi iegūst, ka c dalās ar p_i. Tas nozīmē, ka $10q_i + p_i$ ir divciparu skaitlis.

Tātad vienādība $q_1 q_2 \cdot \overline{abc} = a(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2)$ nevar pastāvēt, jo kreisajā pusē ir reizinātājs $\overline{abc}$ (trīsciparu pirmskaitlis), bet labajā pusē a ir viencipara skaitlis un pārējie reizinātāji – divciparu. Līdz ar to dotā vienādojuma saknes nav racionāli skaitļi.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	4	23	10	7	3	4	1	0	0	2	0	7
Vidēji iegūtais punktu skaits				2,46								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

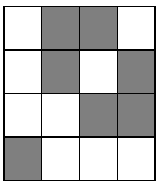
1) izpratne par pirmskaitli un saliktu skaitli,
2) skaitļa pieraksts,
3) kvadrāttrinoma sadalīšana reizinātājos,
4) vispārīgs pamatojums, ka prasītais nav iespējams.

11.5. Atrast lielāko naturālo skaitli N, kuram ir spēkā īpašība: lai kuras N rūtiņas būtu aizkrāsotas 4×4 rūtiņu tabulā, vienmēr varēs izvēlēties divas rindas un divas kolonnas tā, ka katra aizkrāsotā rūtiņa atrodas vai nu izvēlētajā rindā, vai izvēlētajā kolonnā (vai abās).

Atrisinājums. Lielākā N vērtība ir 6. Pamatosim, ja iekrāsotas 6 rūtiņas, tad jebkuram krāsojumam izpildās uzdevuma nosacījumi. Ja kādā rindā ir vairāk nekā divas iekrāsotas rūtiņas, tad izvēlamies šo rindu un vēl kādu rindu, kurā ir kāda iekrāsota rūtiņa. Tātad izvēlētajās divās rindās jau ir vismaz četras iekrāsotas rūtiņas. Tā kā ir palikušas divas iekrāsotas rūtiņas, tad pietiek izvēlēties divas kolonnas, lai iekrāsotās rūtiņas atrastos šajās kolonnās.

Ja nevienā rindā nav vairāk kā divas iekrāsotas rūtiņas, tad pēc Dirihlē principa divas iekrāsotas rūtiņas ir vismaz divās rindās. Izvēlamies šīs divas (vai divas no trim, ja trīs rindās ir pa divām iekrāsotām rūtiņām) rindas. Tad izvēlētajās divās rindās jau ir tieši četras iekrāsotas rūtiņas. Tā kā ir palikušas divas iekrāsotas rūtiņas, tad pietiek izvēlēties divas kolonnas, lai iekrāsotās rūtiņas atrastos šajās kolonnās.

Pamatosim, ka lielākām N vērtībām īpašība nav spēkā visām tabulām. Ja $N = 7$, tad īpašība nav spēkā, piemēram,118. att. dotajam rūtiņu izvietojumam. Ievērojam, ka, izvēloties jebkuras divas rindas, paliek trīs kolonnas, kurās atrodas iekrāsotās rūtiņas.



118. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	7	20	5	6	1	0	4	2	2	0	4	10
Vidēji iegūtais punktu skaits				3,74								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) atbilstoša piemēra atrašana,
2) Dirihlē princips,

3) pamatojums, ka lielāku vērtību iegūt nevar.

12. klase

12.1. Ģeometriskās progresijas pirmais, desmitais un 2020-ais loceklis ir naturāls skaitlis. Vai noteikti arī tās 2019-ais loceklis ir naturāls skaitlis?

Atrisinājums. Nē, 2019-ais loceklis var nebūt naturāls skaitlis, piemēram, ja $b_1 = 1 \in \mathbb{N}$ un $q = \sqrt[3]{2}$, tad

- $b_{10} = b_1 \cdot q^9 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 2^3 = 8 \in \mathbb{N}$,
- $b_{2020} = b_1 \cdot q^{2019} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{2019} = 2^{673} \in \mathbb{N}$,
- $b_{2019} = b_1 \cdot q^{2018} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{2016} \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = 2^{672} \cdot \sqrt[3]{4}$, kas nav naturāls skaitlis.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	10	27	4	0	0	0	0	2	2	1	0	28
Vidēji iegūtais punktu skaits				4,97								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) pretpiemēra atrašana,
2) ģeometriskas progresijas n-tā locekļa aprēķināšans formula,
3) kāpināšana un darbības ar n-tās pakāpes saknēm.

12.2. Noteikt izteiksmes $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ vislielāko un vismazāko vērtību, ja $1 \le x, y, z \le 2020$.

Atrisinājums. Pārveidojam doto izteiksmi un lietojam nevienādību $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \ge 3+2+2+2 = 9.$$

Tātad dotās izteiksmes mazākā vērtība ir 9 un to var iegūt, ja $x = y = z$.

Lai atrastu izteiksmes F maksimālo vērtību, vispirms pierādīsim lemmu.

Lemma. Funkcija $f(x) = x + \frac{k}{x}$, $k > 0$, dilst pa kreisi no tās minimuma punkta $x = \sqrt{k}$ un aug pa labi no tā, tas ir,

$$0 < u < v \le \sqrt{k} \Rightarrow f(u) > f(v) \quad \text{un} \quad \sqrt{k} \le u < v \Rightarrow f(u) < f(v).$$

Pierādījums. Apskatām abus gadījumus.

$$f(u) > f(v) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{u}-\frac{k}{v} > v-u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{uv} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad k > uv.$$

$$f(u) < f(v) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{u}-\frac{k}{v} < v-u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{uv} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k < uv.$$

Saskaņā ar Lemmu fiksētiem $y, z \in [1; 2020]$, funkcija

$$F(x) = x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{x}(y+z)+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+3$$

maksimālo vērtību sasniedz intervāla galapunktā, tas ir, kad $x = 1$ vai $x = 2020$. Simetrijas dēļ tas pats attiecas uz gadījumiem, kad fiksējam x, y un x, z. Tātad izteiksme F maksimālo vērtību sasniedz tad, kad $x, y, z \in \{1; 2020\}$. Apskatām izteiksmes F vērtību, ja $x, y, z \in \{1; 2020\}$:

- $x = y = z = 1$ vai $x = y = z = 2020$, tad $F(x; x; x) = 9$;
- $x = y = 1$ un $z = 2020$, tad $F(1; 1; 2020) = 2022 \cdot 2\frac{1}{2020} = \frac{2022 \cdot 4041}{2020}$;
- $x = y = 2020$ un $z = 1$, tad $F(2020; 2020; 1) = 4041 \cdot 1\frac{2}{2020} = \frac{4041 \cdot 2022}{2020}$.

Līdz ar to dotās izteiksmes vislielākā vērtība ir $\frac{4041 \cdot 2022}{2020}$.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	2	11	6	4	1	27	2	12	0	1	0	8
Vidēji iegūtais punktu skaits			4,10									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – algebra.

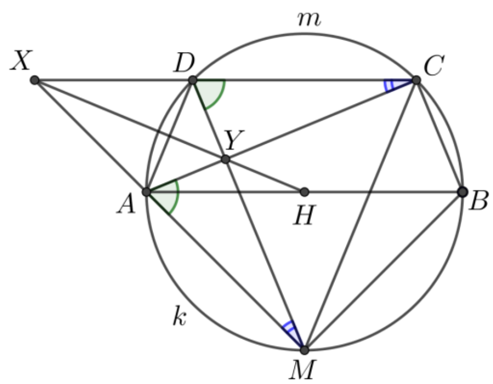
Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) nevienādības $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ izmantošana,
2) funkcijas īpašību pierādīšana,
3) izteiksmes lielākās un mazākas vērtības atrašana un norādītas mainīgo vērtības, ar kurām šīs vērtības iegūst,
4) pamatojums, ka lielāku un mazāku vērtību iegūt nevar.

12.3. Riņķa līnijā ω ievilkta vienādsānu trapece $ABCD$, punkts H ir garākā pamata AB viduspunkts. Punkts M ir viduspunkts tam lokam AB, kas nesatur punktus C un D. Taisnes CD un AM krustojas punktā X. Zināms, ka nogriežņi HX, DM un AC krustojas vienā punktā Y un $DM = AC$. Pierādīt, ka $AB^2 = 2CD^2$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka H ir riņķa līnijas ω centrs. Tā kā $AC = DM$, tad $\overset{\frown}{CDA} = \overset{\frown}{DAM}$ un $\overset{\frown}{AkM} = \overset{\frown}{DAM} - \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CDA} - \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CmD}$ (skat. 119. att.). Tā kā uz vienādiem lokiem balstās vienādas hordas, tad $AM = CD$. Ievērojam, ka $\sphericalangle MAC = \sphericalangle CDM$ un $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DCA$ kā ievilktie leņķi, kas balstās attiecīgi uz vienu un to pašu loku. Tad $\Delta AYM = \Delta DYC$ pēc pazīmes $\ell m \ell$ un $MY = YC$ kā atbilstošās malas. Esam ieguvuši, ka punkts Y atrodas vienādā attālumā no nogriežņa MC galapunktiem. Trijstūris MXC ir vienādsānu, jo $\sphericalangle DCM = \sphericalangle AMC$ kā leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem DAM un ADC, tātad punkts X atrodas vienādā attālumā no nogriežņa MC galapunktiem. Līdz ar to XY (jeb XH) ir nogriežņa MC vidusperpendikuls. Ievērojam, ka simetrijas dēļ MH ir malu AB un CD vidusperpendikuls. Tā kā četrstūris $DAMC$ ir ievilkts četrstūris, tad tam apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas malu vidusperpendikulu krustpunktā, līdz ar to punkts H ir riņķa līnijas ω centrs.

Tā kā punkts M ir mazākā loka AB viduspunkts, tad $AM = MB$. Trijstūris AMB ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, jo balstās uz diametra AB, tad pēc Pitagora teorēmas $AB^2 = AM^2 + MB^2 =$ $= CD^2 + CD^2 = 2CD^2$.



119. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	17	12	11	4	3	3	12	1	1	4	2	4
Vidēji iegūtais punktu skaits			3,56									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – ģeometrija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) ievilkto leņķu īpašība,
2) trijstūru vienādības pazīmes,
3) četrstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā,
4) vienādsānu taisnleņķa trijstūra pazīme,
5) Pitagora teorēma.

12.4. Zināms, ka četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ir trīs reālas saknes. Vai var gadīties, ka visas šīs saknes ir **a)** veseli skaitļi, **b)** racionāli skaitļi?

Atrisinājums. a) Nē, saknes nevar būt veseli skaitļi. Ievērojam, ka $d\neq 0$, jo pretējā gadījumā $\overline{abcd}$ nav pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka 0 nav vienādojuma sakne. Ja $x\geq 0$, tad $ax^3+bx^2+cx+d\geq d>0$. Tātad vienādojumam var būt tikai negatīvas saknes. Apzīmējot saknes ar $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$ un sadalot kreisās puses izteiksmi reizinātājos, iegūstam

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3).$$

Pieņemsim, ka vienādojuma saknes ir veseli skaitļi. Ja $x=10$, tad iegūstam

$$a(10+x_1)(10+x_2)(10+x_3)=1000a+100b+10c+d=\overline{abcd}.$$

Tātad esam ieguvuši, ka $\overline{abcd}$ ir salikts skaitlis, kas ir pretrunā ar doto. Līdz ar to vienādojumam nav veselu sakņu.

b) Nē, saknes nevar būt racionāli skaitļi. Pieņemsim, ka saknes vienādojumam ir racionālas, tas ir, $-\frac{p_1}{q_1}$, $-\frac{p_2}{q_2}$ un $-\frac{p_3}{q_3}$, turklāt daļas ir nesaīsināmas jeb p_i un q_i ir savstarpēji pirmskaitļi. Pārveidojam vienādojuma kreisās puses izteiksmi:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x+\frac{p_1}{q_1}\right)\left(x+\frac{p_2}{q_2}\right)\left(x+\frac{p_3}{q_3}\right)=\frac{a}{q_1q_2q_3}(q_1x+p_1)(q_2x+p_2)(q_3x+p_3).$$

Ievietojot $x=10$, iegūstam

$$\frac{a}{q_1q_2q_3}(10q_1+p_1)(10q_2+p_2)(10q_3+p_3)=$$
$$=1000a+100\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}\right)+10\left(\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_3}{q_3}+\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_3}{q_3}\right)+\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_3}{q_3}=$$
$$=1000a+100b+10c+d=\overline{abcd}.$$

Reizinot abas puses ar $q_1q_2q_3\neq 0$, iegūstam

$$q_1q_2q_3\cdot\overline{abcd}=a(10q_1+p_1)(10q_2+p_2)(10q_3+p_3).$$

Pamatosim, ja vienādojuma $ax^3+bx^2+cx+d=0$ sakne ir $\frac{p}{q}$ (nesaīsināma daļa), tad a dalās ar q.

Ievietojam vienādojumā $ax^3+bx^2+cx+d=0$ tā sakni $x=\frac{p}{q}$ un pārveidojam iegūto identitāti:

$$a\left(\frac{p}{p}\right)^3+b\left(\frac{p}{q}\right)^2+c\left(\frac{p}{q}\right)+d=0;$$
$$ap^3+bp^2q+cq^2p+dq^3=0;$$
$$q(bp^2+cqp+dq^2)=-ap^3.$$

Tā kā pēdējās vienādības kreisā puse dalās ar q, tad arī labās puses izteiksmei jādalās ar q. Ņemot vērā, ka pēc pieņēmuma p un q ir savstarpēji pirmskaitļi, secinām, ka a ir jādalās ar q.

Līdz ar to secinām, ka q_i ir viencipara skaitlis, jo a ir cipars.

Analogi iegūst, ka c dalās ar p_i. Tas nozīmē, ka $10q_i+p_i$ ir divciparu skaitlis.

Tātad vienādība $q_1q_2q_3\cdot\overline{abcd}=a(10q_1+p_1)(10q_2+p_2)(10q_3+p_3)$ nevar pastāvēt, jo kreisajā pusē ir reizinātājs $\overline{abcd}$ (četrciparu pirmskaitlis), bet labajā pusē a ir viencipara skaitlis un pārējie reizinātāji – divciparu. Līdz ar to dotā vienādojuma saknes nav racionāli skaitļi.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	8	27	9	16	1	5	1	0	1	0	0	6
Vidēji iegūtais punktu skaits			2,06									

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – skaitļu teorija.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) izpratne par pirmskaitli un saliktu skaitli,
2) skaitļa pieraksts,
3) trešās pakāpes polinoma sadalīšana reizinātājos, ja zināmas polinoma saknes,
4) vispārīgs pamatojums, ka prasītais nav iespējams.

12.5. Kādā valstī ir 2020 pilsētas, katra ar katru ir savienota ar ceļu, ceļi ārpus pilsētām nekrustojas (izmantoti viadukti). Biznesmenis ar ceļu pārvaldi spēlē šādu spēli: katru dienu biznesmenis privatizē vienu ceļu, bet ceļu pārvalde nojauc desmit neprivatizētus ceļus. Pierādīt, ka biznesmenis var panākt, ka pēc kāda laika viņam pieder ciklisks ceļu maršruts kas iet caur tieši 70 pilsētām, katrā iegriežoties tieši vienu reizi!

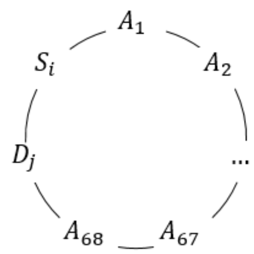
Atrisinājums. Vispirms biznesmenis sev var izveidot ceļu virkni no 67 ceļiem caur kādām pilsētām $A_1 - A_2 - A_3 - \ldots - A_{67} - A_{68}$. To noteikti var izdarīt, jo pat pēc pēdējā gājiena ceļu pārvalde ir nojaukusi tikai $67 \cdot 10 = 670$ ceļus, bet no katras pilsētas iziet 2019 ceļi. Nosauksim pilsētas $A_1, A_2, \ldots, A_{68}$ par zaļām.

Nākamajā etapā biznesmenis var sev privatizēt 40 ceļus, kas iziet no pilsētas A_1 un iet uz pilsētām $S_1, S_2, \ldots, S_{40}$ (skat. 120. att.), kas nav zaļas. To noteikti var izdarīt, jo no pilsētas A_1 iziet $2019 - 68 = 1951$ ceļš uz pilsētām, kas nav zaļas, bet ceļu pārvalde pat pēdējā gājienā kopā ir nojaukusi tikai $(67 + 40) \cdot 10 = 1070$ ceļus. Nosauksim pilsētas $S_1, \ldots, S_{40}$ par sarkanām.

120. att.

Nākamajā etapā biznesmenis var sev privatizēt 40 ceļus, kas iziet no pilsētas A_{68} un iet uz pilsētām $D_1, D_2, \ldots, D_{40}$, kas nav ne zaļas, ne sarkanas. To noteikti var izdarīt, jo no pilsētas A_{68} iziet $2019 - 68 - 40 = 1911$ ceļi uz pilsētām, kas nav ne zaļas, ne sarkanas, bet ceļu pārvalde pat pēdējā gājienā kopā ir nojaukusi tikai $(67 + 40 + 40) \cdot 10 = 1470$ ceļus.

Šobrīd ceļu pārvalde ir nojaukusi 1470 ceļus, bet 40 sarkanās ar 40 zaļajām pilsētām kopā savieno $40 \cdot 40 = 1600$ ceļi, tātad vismaz 130 no tiem vēl nav nojaukti. Pieņemsim, ka nav nojaukts ceļš, starp pilsētām S_i un D_j. Tad pēdējā gājienā biznesmenis var privatizēt šo ceļu un viņš būs ieguvis ciklisku maršrutu caur 70 pilsētām (skat. 121. att.).



121. att.

Skolēnu skaits, kas ieguvuši attiecīgo punktu skaitu par uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	22	30	5	6	3	0	0	0	1	3	1	3
Vidēji iegūtais punktu skaits				1,85								

Skaidrojums par uzdevumu

Matemātikas apakšnozare – kombinatorika.

Zināšanas, prasmes, atrisinājuma struktūra, kas tiek gaidītas no skolēniem, risinot šo uzdevumu:

1) interpretācija ar grafiem,
2) vispārīga algoritma izveidošana.

Nevienādību pierādīšana – pilno kvadrātu atdalīšana

Teorija un piemēri 9.-12. klasei, gatavojoties Novada olimpiādei 2016./2017. m. g.

Skolas kursā galvenais uzsvars tiek likts uz nevienādību risināšanu, bet matemātikas olimpiādēs nevienādības ir jāpierāda. Svarīgi ir saprast atšķirību starp nevienādību risināšanu un pierādīšanu.

Atrisināt nevienādību nozīmē atrast visus tās atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu nav. Visu nevienādības atrisinājumu apvienojumu sauc par šīs nevienādības atrisinājumu kopu.

Pierādīt nevienādību ar vienu vai vairākiem mainīgajiem nozīmē pamatot, ka nevienādība ir patiesa pie jebkurām pieļaujamajām mainīgo vērtībām.

Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

Bieži vien nevienādības pierāda, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus. Tādējādi iegūst nevienādību, kuras patiesums ir acīmredzams vai viegli noskaidrojams ar elementāru spriedumu palīdzību.

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

- Nevienādības kādu pusi aizstāj ar tai identisku izteiksmi.
- Nevienādības abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nemaina nevienādības definīcijas apgabalu.
- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir pozitīva visām mainīgo vērtībām).
- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu negatīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir negatīva visām mainīgo vērtībām).
- Nevienādības abas puses kāpina kvadrātā vai velk kvadrātsakni, ja definīcijas kopā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls nepāra skaitlis.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls pāra skaitlis un definīcijas kopā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.

Pilno kvadrātu atdalīšana

Viens no ekvivalento pārveidojumu veidiem ir pilno kvadrātu atdalīšana. Lai atdalītu pilno kvadrātu, izmanto saīsinātās reizināšanas formulas:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Bieži vien tikai ar formulu izmantošanu nepietiek, tāpēc jāizmanto arī spriedumi. Visbiežāk izmantotie spriedumi ir šādi:

- ja A ir algebriska izteiksme, tad $A^2 \geq 0$;
- ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes, tad $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 \geq 0$;
- ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes un $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ir nenegatīvas izteiksmes, tad $c_1A_1^2 + c_2A_2^2 + \cdots + c_nA_n^2 \geq 0$.

Piezīme. $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 = 0$ tad un tikai tad, ja $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$.

Uzdevumu piemēri

1. Pierādīt nevienādību $x^2 + 8x + y^2 - 2y + 17 \geq 0$.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \geq 0;$$
$$(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2) + (y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2) \geq 0;$$
$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

2. Pierādīt nevienādību $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

1. atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 \geq 0;$$
$$(x^2 - 2xy + y^2) + x^2 + y^2 \geq 0;$$
$$(x - y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir trīs nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

2. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2\right) + \frac{3}{4}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 \geq 0$ un $\frac{3}{4}y^2 \geq 0$. Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

3. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība $a + \frac{bc}{a} \geq \frac{4bc}{b+c}$.

Atrisinājums. Abas nevienādības puses reizinām ar pozitīvu izteiksmi $a(b + c)$:

$$a^2(b + c) + bc(b + c) \geq 4abc;$$
$$a^2b + a^2c + b^2c + bc^2 - 4abc \geq 0;$$
$$a^2b - 2abc + bc^2 + a^2c - 2abc + b^2c \geq 0;$$
$$b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0;$$
$$b(a - c)^2 + c(a - b)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $b > 0, c > 0$, tad $b(a - c)^2 \geq 0$ un $c(a - b)^2 \geq 0$. Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem pozitīviem skaitļiem a, b un c.

4. Pierādīt, ka $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^4 + 1 - 2x^3 - x^2 \geq 0;$$
$$x^4 - 2x^3 + x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0;$$
$$x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 1)^2 \geq 0;$$
$$x^2(x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $x^2(x - 1)^2 \geq 0$ un $(x^2 - 1)^2 \geq 0$. Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

5. Pierādīt, ka $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y) + 2y^2 + 4y + 3 \geq 0;$$
$$((x + y)^2 + 2(x + y) + 1) + 2(y^2 + 2y + 1) \geq 0;$$
$$(x + y + 1)^2 + 2(y + 1)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $(x+y+1)^2 \geq 0$ un $2(y+1)^2 \geq 0$. Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

Citi avoti

- A. Ločmele, I. Palma, L. Ramāna, A. Andžāns «Nevienādību pierādīšanas metodes», 1997 http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/05/Nvd_pier.pdf
- J. Herman, R. Kučera, J. Šimša «EQUATIONS AND INEQUALITIES. Elementary problems and Theorems in Algebra and Number Theory», Springer, 2000

Dirihlē princips

Teorija un piemēri, gatavojoties Novada olimpiādei 2017./2018. m. g.

Apskatīsim pavisam vienkāršu uzdevumu.

Pēterim ir 3 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai noteikti kādā no šiem būriem ir vismaz divi truši?

Uz šo jautājumu jūs visticamāk uzreiz atbildēsiet: "Nu, protams!" Ja šāda būra nebūtu, tad Pēterim katrā būrī būtu ne vairāk kā viens trusis. Tātad abos būros kopā būtu ne vairāk kā divi truši, bet Pēterim ir 3 truši. Līdz ar to noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz divi truši.

Ja Pēterim būtu 4 truši un 3 būri, vai arī tad noteikti būtu tāds būris, kurā atrodas vismaz divi truši? Bet, ja nu Pēterim būtu $(n+1)$ trusis un n būri?

Atbilde, spriežot līdzīgi, atkal būs apstiprinoša.

1. teorēma (Dirihlē princips). Ja vairāk nekā n objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz divi objekti.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka nevienā grupā nav vairāk kā viens objekts. Tā kā grupu pavisam ir n, tad kopā nav izvietoti vairāk kā n objekti, bet grupās ir jāsadala vairāk nekā n objekti. Tātad pieņēmums ir aplams un noteikti ir grupa, kurā ir vairāk nekā viens, tas ir, vismaz 2 objekti. ■

Bieži vien Dirihlē principu formulē šādā veidā:

„Ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens (tātad vismaz divi) truši."

Lietojot Dirihlē principu uzdevumu risināšanā, galvenais ir izdomāt, kas katrā uzdevumā būs "būri" un kas – "truši". Uzdevumu risinājumā var gan atsaukties uz Dirihlē principu, gan arī atrisinājumu veidot, piemēram, līdzīgi kā pierādot 1. teorēmu. Abi šādi risinājumi ir pareizi (skat., piem., nākamo uzdevumu).

Uzdevumu piemēri

1. Pulciņā ir 13 skolēni. Pierādīt, ka no tiem var atrast tādus divus, kas dzimuši vienā un tajā pašā mēnesī!

   1. atrisinājums. Ja katrā mēnesī būtu dzimis ne vairāk kā viens skolēns, tad visos mēnešos kopā būtu dzimuši ne vairāk kā 12 skolēnu, bet pulciņā ir 13 skolēni. Tātad noteikti ir tāds mēnesis, kurā dzimuši vismaz divi no šī pulciņa skolēniem.

   2. atrisinājums. Šajā uzdevumā 13 skolēni ir jāsadala 12 grupās (mēnešos). Pēc Dirihlē principa noteikti būs mēnesis, kurā ir dzimuši vismaz divi skolēni, kas arī bija jāpierāda.

2. Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 8. Pierādīt, ka, izvēloties jebkurus piecus no tiem, varēs atrast tādus divus, kuru summa ir 9.

   1. atrisinājums. Jebkurš no pieciem izvēlētajiem skaitļiem ietilpst vienā no šādām grupām (grupas veidotas no skaitļiem, kuru summa ir 9): „1 un 8"; „2 un 7"; „3 un 6"; „4 un 5". Ja katrā grupā būtu ne vairāk kā viens skaitlis, tad visās grupās kopā būtu ne vairāk kā četri skaitļi, bet ir jāizvēlas pieci skaitļi, tātad noteikti ir tāda grupa, kurā ir divi skaitļi, un šo skaitļu summa ir 9.

   2. atrisinājums. Jebkurš no pieciem izvēlētajiem skaitļiem ietilpst vienā no šādiem "būriem": „1 un 8"; „2 un 7"; „3 un 6"; „4 un 5". Tāpēc pēc Dirihlē principa vismaz vienā būrī nonāks vismaz 2 "truši" jeb 2 skaitļi, kuru summa ir deviņi.

3. Izliekta 100-stūra virsotnes kaut kādā secībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 100, katra virsotne ar citu skaitli. Katrai malai aprēķina tās galu numuru starpību (no lielākā skaitļa atņem mazāko). Pierādīt, ka vismaz divām malām šīs starpības ir vienādas!

   Atrisinājums. Ir iespējamas tikai 99 dažādas starpības: 1; 2; ...; 99; tie ir „būri". Ir 100 malas, kam aprēķinātas starpības; tie ir „truši". Pēc Dirihlē principa vismaz vienā būrī būs vismaz 2 truši jeb vismaz divām malām šīs starpības ir vienādas.

4. Sniegbaltīte uzdāvināja katram no 7 rūķīšiem pa 5 konfektēm: „Vāverīti”, „Margrietiņu” un „Lācīti”, pie tam katrs rūķītis saņēma vismaz vienu katra veida konfekti. Pierādīt, ka ir divi tādi rūķīši, kam viņa uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus!

Atrisinājums. Ievērojam, ka skaitli 5 var izteikt kā trīs naturālu skaitļu summu tikai divos veidos: $3+1+1$ un $2+2+1$ (neņemot vērā saskaitāmo secību). Ņemot vērtā arī to, kura no konfektēm pirmajā gadījumā dāvināta 3 eksemplāros un kura no konfektēm otrajā gadījumā – vienā eksemplārā, iegūstam 6 dažādas iespējas:

“Vāverīte”	3	1	1	1	2	2
“Margrietiņa”	1	3	1	2	1	2
“Lācītis”	1	1	3	2	2	1

Tā kā ir 7 rūķīši un 6 dažādas iespējas, kā uzdāvināt konfektes, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir tādi divi rūķīši, kam Sniegbaltīte uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus.

5. Taisne nokrāsota 10 dažādās krāsās. Pierādīt, ka uz tās var atrast divus punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un starp kuriem attālums centimetros ir vesels skaitlis!

Atrisinājums. Izvēlamies uz taisnes 11 punktus tā, lai attālums starp katriem diviem no tiem būtu vesels skaitlis. Tā kā ir izvēlēti 11 punkti un ir 10 dažādas krāsas, tad pēc Dirihlē principa vismaz divi no šiem punktiem ir vienā krāsā.

6. Pierādīt, ka starp jebkuriem sešiem naturāliem skaitļiem, kas nedalās ar 10, var atrast divus tādus, kuru summa vai starpība dalās ar 10.

Atrisinājums. Ja starp apskatāmajiem skaitļiem ir divi tādi, kam pēdējie cipari vienādi, tad to starpība dalās ar 10. Ja nav tādu divu skaitļu, kam pēdējie cipari ir vienādi, tad sadalām skaitļus 5 grupās atbilstoši to pēdējiem cipariem: “1 un 9”; “2 un 8”; “3 un 7”; “4 un 6”; “5”. Tā kā ir 6 skaitļi un piecas grupas, tad divi skaitļi noteikti nonāk vienā grupā, to summa dalās ar 10.

7. Vairākās kaudzītēs kopā ir 58 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav mazāk kā 1 sērkociņš un nav vairāk kā 12 sērkociņi. Pierādīt, ka ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi!

Atrisinājums. Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda, tas ir, nav divu kaudzīšu, kurās ir vienāds sērkociņu skaits un nav divu kaudzīšu, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi. Tad no katra skaitļu pāra $(1;12), (2;11), (3;10), (4;9), (5;8), (6;7)$augstākais viens var būt sērkociņu skaits kādā kaudzītē. Tāpēc sērkociņu nav vairāk kā $7+8+9+10+11+12=57$ (no katra skaitļu pāra izvēlējās lielāko skaitli) – pretruna. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi.

8. Pierādīt, ka no jebkuriem astoņiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties tādus divus, kuru starpība dalās ar 7.

Atrisinājums. Naturāls skaitlis, dalot ar 7, var dot septiņus dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Dotos astoņus skaitļus uzskatīsim par „trušiem”, savukārt vienā „būrī” ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 7, tātad ir 7 „būri”. Pēc Dirihlē principa vismaz vienā „būrī” nonāks vismaz divi „truši” jeb vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Šo skaitļu starpība dalās ar 7 (skat. nākamo teorēmu).

Teorēma par starpības dalīšanos. Dots, ka a, b un n – veseli skaitļi, turklāt $n > 0$. Starpība $(a-b)$ dalās ar n tad un tikai tad, ja a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar n.

Apskatīsim vēl vienu uzdevumu par Pēteri un viņa trušiem.

Pēterim ir 5 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai noteikti kādā no šiem būriem ir vismaz 3 truši?

Risināsim šo uzdevumu līdzīgi kā iepriekšējo uzdevumu par trušiem. Ja šāda būra nebūtu, tad Pēterim katrā būrī būtu ne vairāk kā 2 truši. Tātad abos būros kopā būtu ne vairāk kā 4 truši, bet Pēterim ir 5 truši. Līdz ar to noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz 3 truši.

Un, ja Pēterim būtu 10 truši un 3 būri? Vai mēs varētu apgalvot, ka noteikti ir tāds būris, kurā ir vismaz 4 truši?

Atbilde atkal ir apstiprinoša. Ja katrā būrī būtu ne vairāk kā 3 truši, tad visos būros kopā būtu izvietoti ne vairāk kā 9 truši, bet Pēterim ir 10 truši. Tātad noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz 4 truši.

Šajos piemēros varēja lietot tālāk doto Dirihlē principa vispārinājumu.

2. teorēma (Dirihlē princips). Ja vairāk nekā $m \cdot n$ objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz $(m+1)$ objekts.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka nevienā grupā nav vairāk kā m objekti. Tā kā grupu pavisam ir n, tad kopā nav izvietoti vairāk kā $m \cdot n$ objekti, bet grupās ir jāsadala vairāk nekā $m \cdot n$ objekti. Tātad pieņēmums ir aplams un noteikti ir grupa, kurā ir vairāk nekā m, tas ir, vismaz $(m+1)$ objekts. ■

Uzdevumu piemēri

9. Mākslinieku darbnīcā izgatavotas 36 skulptūras, kuru masa ir 490 kg, 495 kg, 500 kg, ..., 665 kg. Vai visas šīs skulptūras var aizvest ar 7 automašīnām, ja katrai no tām kravnesība ir 3 tonnas, un ar katru automašīnu drīkst veikt tikai vienu reisu un automašīnas nedrīkst pārslogot?

1. atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Ja katrā no septiņām automašīnām iekrautu ne vairāk kā 5 skulptūras, tad kopā visās mašīnās būtu izvietotas ne vairāk kā 35 skulptūras, bet jāizvieto ir 36 skulptūras. Tātad noteikti ir tāda mašīna, kurā būs jāiekrauj vismaz sešas skulptūras. Taču pat sešu vieglāko skulptūru kopējā masa ir $490 + 495 + 500 + 505 + 510 + 515 = 3015$ kilogrami, tātad ir lielāka par masu, kādu pieļaujams iekraut vienā automašīnā. Tas nozīmē, ka uzdevuma prasības nav izpildāmas.

2. atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Šajā uzdevumā „truši” ir skulptūras, „būri” – automašīnas. Ievērosim, ka $36 = 7 \cdot 5 + 1$ skulptūras jāsadala pa 7 automašīnām. Tātad pēc Dirihlē principa vismaz vienā automašīnā jāiekrauj vismaz 6 skulptūras. Taču pat sešu vieglāko skulptūru kopējā masa ir $490 + 495 + 500 + 505 + 510 + 515 = 3015$ kilogrami, tātad ir lielāka par masu, kādu pieļaujams iekraut vienā automašīnā. Tas nozīmē, ka uzdevuma prasības nav izpildāmas.

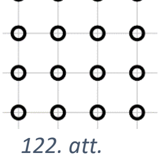
10. Profesora Cipariņa olimpiādē bija 3 uzdevumi. Tajā piedalījās 100 skolēni. Pierādīt, ka atradīsies vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus (vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu)! Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja, vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti.

Atrisinājums. No trīs uzdevumiem var izveidot 8 dažādus atrisināto uzdevumu „komplektus” (tajā skaitā, neviens atrisināts uzdevums), tabulā ar “+” atzīmēti tie uzdevumi, kuri ir izrēķināti.

Komplekta nr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1. uzdevums		+			+		+	+
2. uzdevums			+		+	+		+
3. uzdevums				+		+	+	+

Ja katru „komplektu” būtu atrisinājuši ne vairāk kā 12 skolēni, tad skolēnu kopējais skaits būtu ne vairāk kā $12 \cdot 8 = 96 < 100$. Tātad ir vismaz 13 skolēni, kas atrisinājuši vienus un tos pašus uzdevumus.

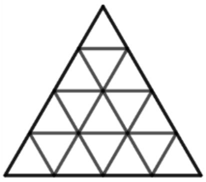
11. Rūtiņu virsotnēs atzīmēti 16 balti punkti (skat. 122. att.). Vai tieši septiņus punktus var nokrāsot melnus tā, lai nekādi trīs vienā krāsā nokrāsoti punkti neatrastos uz vienas taisnes?



122. att.

Atrisinājums. Nē, to nevar izdarīt. Ja melnā krāsā nokrāsoti tieši septiņi punkti, tad paliek deviņi balti punkti. Tā kā visi punkti izvietoti četrās rindās, tad pēc Dirihlē principa kādā no šīm rindām būs vismaz trīs balti punkti, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

12. Katrā no 16 mazajiem trijstūriem (skat. 123. att.) ir ierakstīts viens skaitlis, pavisam ierakstīti septiņi trijnieki un deviņi piecinieki. Pierādīt, ka var izvēlēties tādu trijstūri, kā parādīts 124. att., kurā ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 18.


123. att.


124. att.

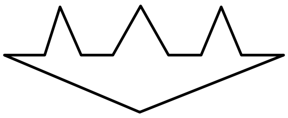

125. att.

Atrisinājums. Sadalīsim sākotnējo trijstūri četros trijstūros ar malas garumu 2 (skat. 125. att.). Tā kā ir četri šādi trijstūri (kas nepārklājas), un tajos ierakstīti 9 piecinieki, tad kādā no šiem trijstūriem būs vismaz trīs piecinieki, tāpēc tajā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz $5 + 5 + 5 + 3 = 18$, kas bija jāpierāda.

13. Vai eksistē tāds **a)** 11-stūris; **b)** 12-stūris, kuram astoņas virsotnes atrodas uz vienas taisnes?

Atrisinājums. a) Ja 11-stūra astoņas virsotnes atrodas uz vienas taisnes, tad 3 virsotnes uz tās neatrodas. Apzīmēsim tās ar A, B un C. Tad no pārējām 8 virsotnēm daļa atrodas starp A un B, daļa – starp B un C un daļa – starp C un A. Pēc Dirihlē principa kādā no šīm trīs daļām ir vismaz 3 virsotnes un tās visas atrodas uz vienas taisnes – pretruna.

b) Jā, var, skat., piemēram, 126. att.


126. att.

14. No pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem izvēlēts 51 skaitlis. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus, no kuriem viens dalās ar otru!

Atrisinājums. Visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 sadalīsim 50 grupās: katru nepāra skaitli ievietosim citā grupā (pavisam ir 50 nepāra skaitļi). Ievērojam, katru pāra skaitli p var izteikt kā nepāra skaitļa n un divnieka pakāpes reizinājumu, t. i., $p = n \cdot 2^k, k > 0$. Pāra skaitli p ievietosim vienā grupā ar tam atbilstošo nepāra skaitli n. Pirmās grupas ir

$\{1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ 64\}$, $\{3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ 96\}$; $\{5;\ 10;\ 20;\ 40;\ 80\}$ utt.

Izvēloties jebkurus divus skaitļus no vienas grupas, lielākais skaitlis dalās ar mazāko (dalījums ir divnieka pakāpe).

Tā kā tika izvēlēts 51 skaitlis, bet visi skaitļi ir sadalīti 50 grupās, tad vismaz divi skaitļi būs no vienas grupas; tie arī ir meklētie divi skaitļi.

15. Pierādīt, ka starp jebkuriem 35 divciparu skaitļiem var atrast trīs tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas!

Atrisinājums. Izveidosim tabulu – gar tās horizontālo malu uzrakstīsim visas iespējamās skaitļa pirmā cipara vērtības, bet gar vertikālo malu – otrā cipara vērtības. Tabulas rūtiņās ierakstīsim kolonnas un rindiņas numuru summu (skat. 127. att.). Esam izveidojuši atbilstību starp skaitļiem un to ciparu summām.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	…					
1	2	3	…						
2	3	…							
3	…								
4									
5									
6									…
7								…	16
8							…	16	17
9						…	16	17	18

127. att.

Tabulā atrodami visi divciparu skaitļi no 10 līdz 99. Pavisam iespējamas 18 dažādas ciparu summas vērtības (varam izveidot 18 dažādas grupas). Ievērojam, ka
1) ciparu summa 1 un 18 katra ir tikai vienam skaitlim (10 un 99),
2) ciparu summa 2 un 17 katra ir tikai diviem skaitļiem (11; 20 un 89; 98).
Tātad šajās grupās vairāk skaitļu nevar būt neatkarīgi no tā, kādus 35 skaitļus izvēlamies.
Pieņemsim, ka šīs 4 grupas ir maksimāli piepildītas – tajās kopā ievietoti 6 skaitļi. Tad atlikušajās 14 grupās jāievieto 29 skaitļi. Bet pēc Dirihlē principa noteikti ir tāda grupa, kurā ir vismaz trīs skaitļi – tie arī ir meklētie trīs skaitļi, kuru ciparu summas ir vienādas.

16. Pēterītim bija 100 aplīši, uz kuriem uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 100 (uz katra aplīša cits skaitlis). Skolotāja lika izvēlēties 4 aplīšus un izvietot tos tā, lai būtu patiesa vienādība $\bigcirc + \bigcirc = \bigcirc + \bigcirc$. Aplīši bija izbiruši uz grīdas, un līdz šī uzdevuma saņemšanai Pēteris bija paguvis savākt tikai 21 aplīti. Vai ar tiem viņam noteikti pietika, lai izpildītu skolotājas uzdevumu?

Atrisinājums. No Pēterīša salasītajiem aplīšiem var izveidot $\frac{21\cdot 20}{2} = 210$ dažādus skaitļu pārus (pārus, kas atšķiras tikai ar aplīšu secību, uzskatām par vienādiem). Šos pārus tālākajā spriedumā uzskatīsim par "trušiem".

Apskatām, kādas var būt vienā pārī ietilpstošo skaitļu summas. Mazākā summas vērtība ir $1 + 2 = 3$; lielākā summas vērtība ir $99 + 100 = 199$. Tātad pavisam iespējamas 197 dažādas summas vērtības: 3; 4; 5;...; 197; 198; 199. Šīs dažādās vērtības uzskatīsim par "būriem". Tā kā "trušu" ir vairāk nekā "būru", tad pēc Dirihlē principa kādā "būrī" ir vismaz divi "truši". Tas nozīmē, ka Pēterītim ir divi aplīšu pāri, kuros ietilpstošo skaitļu summas ir vienādas; pieņemsim, ka $A + B = C + D$ (pāri ir A, B un C, D).

Pamatosim, ka neviens skaitlis neietilpst abos pāros. Ja, piemēram, būtu $A = C$, tad no $A + B = C + D$ sekotu arī $B = D$ un pāri A, B un C, D nebūtu dažādi. Tātad visi četri aplīši A, B, C, D ir dažādi, tāpēc Pēterītis no tiem var izveidot vienādību $A + B = C + D$.

17. Pierādīt, ka no septiņiem patvaļīgiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, kuru kvadrātu starpība dalās ar 11.

Atrisinājums. Aprēķinām, kādus atlikumus pēc moduļa 11 dod naturālu skaitļu kvadrāti:

$n \pmod{11}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 \pmod{11}$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Tātad naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 11, var dot tikai atlikumu 0, 1, 3, 4, 5 vai 9. Tā kā doti septiņi skaitļi, tad no Dirihlē principa izriet, ka divu skaitļu kvadrāti, dalot ar 11, dod vienādus atlikumus. Izvēloties šos skaitļus, iegūstam vajadzīgo – to kvadrātu starpība dalās ar 11.

Avoti

A. Andžāns, J. Čakste, T. Larfelds, L. Ramāna, M. Seile “Vidējās vērtības metode” – “Mācību grāmata”, Rīga, 1996. Vairāk skat.: http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/06/VidVeertMet.pdf

Svēršanas uzdevumi

Teorija un piemēri, gatavojoties Novada olimpiādei 2018./2019. m. g.

Svēršanas uzdevumos galvenokārt izmantosim sviras svarus. Svariem ir divi svaru kausi. Svēršanā **neizmantosim** atsvarus. Svari **neparādīs** ķermeņu masu. Mēs varēsim tikai redzēt, vai abi svaru kausi ir līdzsvarā.

Aplūkosim uzdevumus, kuros, izmantojot doto informāciju, galvenokārt tiks prasīts atrast vienu (vai vairākus) no pārējiem objektiem atšķirīgu objektu. Šo uzdevumu atrisinājumi lielākoties balstās uz loģisku spriedumu ceļā izveidotām objektu grupēšanas metodēm.

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums "Kā...?", tad atrisinājumā ir jāapskata, kā rīkoties **pilnīgi visās** iespējamajās situācijās, lai panāktu prasīto rezultātu. Nepietiek apskatīt tikai vienu vai dažus "labvēlīgākos" gadījumus.

Uzdevumu piemēri

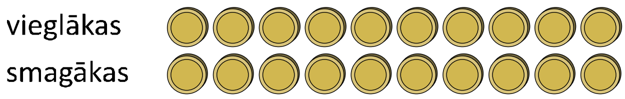
1. Dotas 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?

Atrisinājums. Sadalām monētas pa pāriem un salīdzinām katra pāra monētas – nosakām vieglāko un smagāko monētu katrā pārī. Pēc katras svēršanas vieglāko monētu liekam vienā kaudzītē, bet smagāko – otrā kaudzītē. Tā kā ir $20 : 2 = 10$ pāri, tad ir veiktas 10 svēršanas. (Skat. 128. att.) Skaidrs, ka visvieglākā monēta jāmeklē starp vieglākajām, bet vissmagākā – starp smagākajām. Apskatām katru kaudzīti atsevišķi.

No kaudzītes, kurā ir vieglākās monētas, paņemam divas un salīdzinām tās, vieglāko atstājam svaros un salīdzinām ar nākamo, atkal svaros atstājot vieglāko. Tā turpinām, kamēr visas atlikušās monētas no šīs kaudzītes ir nosvērtas. Pēdējās svēršanas vieglākā monēta ir pati vieglākā no visām. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Analoģiski no kaudzītes, kurā ir smagākās monētas, atrod pašu smagāko no visām – svaros visu laiku jāatstāj smagākā monēta, bet vieglākā jāmet prom. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Līdz ar to ar $10 + 9 + 9 = 28$ svēršanām esam atraduši gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu.



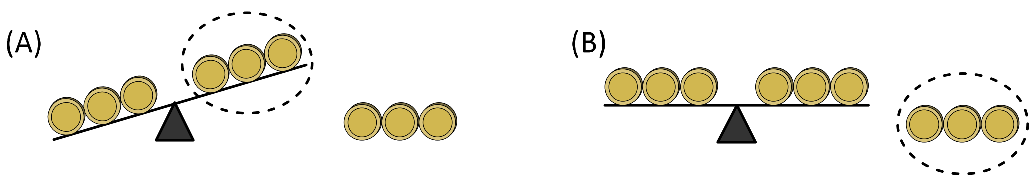
128. att.

2. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā citas. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu, ja zināms, ka visu īsto monētu masas ir vienādas?

Atrisinājums. Sadalām šīs monētas trīs kaudzītēs pa 3 monētām katrā. Skaidrs, ka viltotā monēta atrodas vienā no šīm kaudzītēm. Pirmajā svēršanā salīdzinām divas no šīm kaudzītēm.

(A) Ja viena kaudzīte ir vieglāka nekā otra, tad viltotā (vieglākā) monēta ir šajā kaudzītē (skat. 129. att. (A)).

(B) Ja abām kaudzītēm ir vienāda masa, tad viltotā monēta ir trešajā, nesvērtajā kaudzītē (skat. 129. att. (B)).

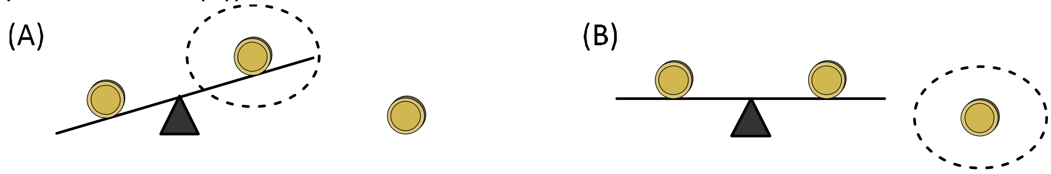


129. att.

Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir viltotā monēta, pārējās kaudzītes vairs nav nepieciešamas. Otrajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai no šīs kaudzītes.

(A) Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta (skat. 130. att. (A)).

(B) Ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas šajā svēršanas reizē netika svērta (skat. 130. att. (B)).



130. att.

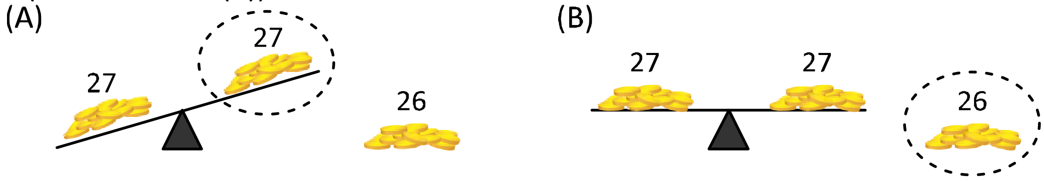
3. Zināms, ka no 80 monētām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā pārējās, kurām visām ir vienāda masa. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu?

Atrisinājums. Sadalām monētas trīs kaudzītēs: divas kaudzītes pa 27 monētām katrā un viena kaudzīte, kurā ir 26 monētas.

Pirmajā svēršanā salīdzinām kaudzītes, kurās ir pa 27 monētām. Iespējami divi gadījumi.

(A) Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta (skat. 131. att. (A)).

(B) Ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tajā kaudzītē, kas atradās malā (skat. 131. att. (B)).



131. att.

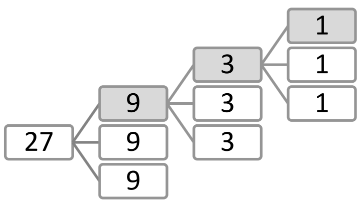
Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir viltotā monēta, pārējās kaudzītes vairs nav nepieciešamas. Tātad atlikušajās trīs svēršanās no 27 monētām jāatrod viltotā. (Ja viltotā monēta atradās kaudzītē, kurā bija 26 monētas, tad šai kaudzītei pievienojot vienu "īsto" monētu no citas kaudzītes, arī iegūstam kaudzīti, kurā ir 27 monētas.)

Sadalām 27 monētas trīs vienādās kaudzītēs pa 9 monētām katrā un otrajā svēršanā salīdzināsim savā starpā divas no šīm kaudzītēm. Atkārtojot tādus pašus spriedumus kā pēc pirmās svēršanas, atrodam to deviņu monētu kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta.

Pirms trešās svēršanas atkal kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta sadalām trīs vienādās kaudzītēs pa trim monētām katrā un atkal salīdzinām divas no šīm kaudzītēm. Nosakām, kurā no šīm trīs monētu kaudzītēm atrodas viltotā monēta.

Ceturtajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai. Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta, ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas šajā svēršanas reizē palika malā (netika svērta).

(Shematiski monētu dalīšana mazākās kaudzītēs parādīta 132. att., iekrāsojums apzīmē kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta.)



132. att.

4. Dotas 25 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka 24 monētu masas ir vienādas savā starpā, bet vienas monētas masa ir citāda. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

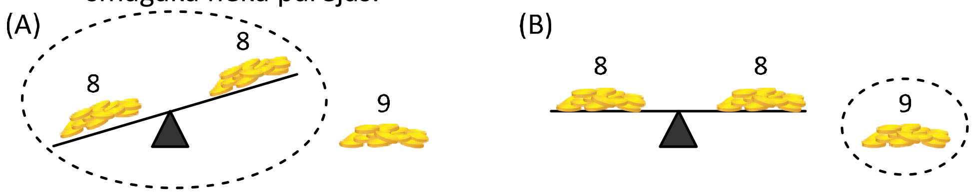
Atrisinājums. Uzliekam uz katra svaru kausa 8 monētas.

(A) Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir atradusies uz svariem (skat. 133. att. (A)). Otrajā svēršanā salīdzinām vieglākā kausa 8 monētas ar jebkurām 8 malā palikušajām (parastajām) monētām.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz "smagākā" kausa un ir smagāka nekā citas monētas.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz "vieglākā" kausa un ir vieglāka nekā citas monētas.

(B) Ja kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta palikusi malā (skat. 133. att. (B)). Otrajā svēršanā salīdzinām malā palikušās 9 monētas ar jebkurām 9 jau svērtajām (parastajām) monētām.

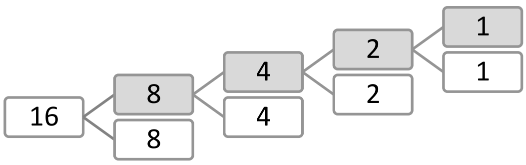
- Ja svaru kauss ar 9 parastajām monētām nosveras uz leju, tad atšķirīgā monēta ir vieglāka nekā pārējās.
- Ja svaru kauss ar 9 parastajām monētām nosveras uz augšu, tad atšķirīgā monēta ir smagāka nekā pārējās.



133. att.

5. Grozā ir 16 akmeņi – 15 parasti, 1 radioaktīvs. Tie visi izskatās vienādi. Ir dota ierīce, ar kuras palīdzību var noteikt, vai starp apskatāmajiem akmeņiem ir vai nav radioaktīvais akmens (ar ierīci var pārbaudīt arī vairākus akmeņus reizē, bet ierīce nenorāda, kurš tieši ir radioaktīvais akmens). Kā ar 4 pārbaudēm atrast radioaktīvo akmeni?

Atrisinājums. Sākumā sadalām visus 16 akmeņus divās kaudzītēs pa 8 akmeņiem katrā un pārbaudām vienu kaudzīti. Neatkarīgi no pārbaudes rezultāta, varēs pateikt, kurā kaudzītē ir meklētais akmens. Pēc tam to kaudzīti, kurā ir radioaktīvais akmens, atkal sadala divās daļās, pa 4 akmeņiem katrā un pārbauda vienu no tām. Tālāk kaudzīti, kurā ir meklētais akmens, atkal sadala divās daļās pa 2 akmeņiem katrā un atkal pārbauda vienu no tām. Beidzot pārbauda vienu no diviem akmeņiem, no kuriem viens ir radioaktīvais akmens, un noskaidro, kurš tieši tas ir. (Shematiski akmeņu dalīšana mazākās kaudzītēs parādīta 134. att., iekrāsojums apzīmē kaudzīti, kurā atrodas radioaktīvais akmens.)



134. att.

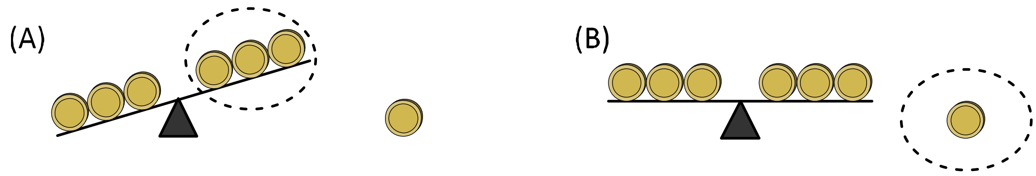
6. No 7 monētām vienai monētai masa ir mazāka nekā pārējām. Kā ar divām svēršanām var noskaidrot, kura ir vieglākā monēta?

Atrisinājums. Katrā svaru kausā ieliekam 3 monētas.

(A) Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad vieglākā monēta atrodas uz "vieglākā" svaru kausa (skat. 135. att. (A)). Otrajā svēršanā katrā svaru kausā ieliekam pa vienai monētai no "vieglākā" kausa.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir tā, kas palika malā.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad vieglākā monēta atrodas uz "vieglākā" svaru kausa.

(B) Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad vieglākā monēta ir tā, kas nebija uz svariem (skat. 135. att. (B)).



135. att.

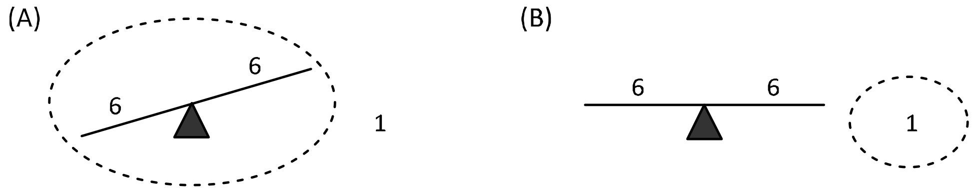
7. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienādu masu, bet viena – ar atšķirīgu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā, izmantojot divas svēršanas, noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

Atrisinājums. Katrā svaru kausā ieliekam 6 monētas.

(A) Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir atradusies uz svariem (skat. 136. att. (A)). Otrajā svēršanā katrā svaru kausā ieliekam pa trīs monētām no "vieglākā" kausa.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz "smagākā" kausa un ir smagāka nekā citas monētas.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz "vieglākā" kausa un ir vieglāka nekā citas monētas.

(B) Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kas nebija uz svariem (skat. 136. att. (B)). Otrajā svēršanā salīdzinot to ar kādu no svērtajām monētām, noskaidrojam, vai tā ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās monētas.

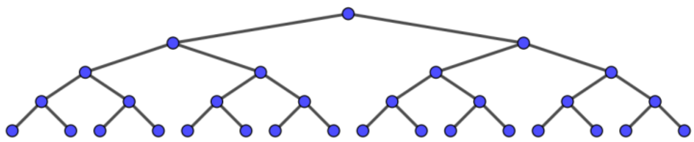


136. att.

8. Doti 16 akmeņi ar dažādām masām. Pierādiet, ka ar 18 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem var atrast pašu smagāko un otru smagāko akmeni!

Atrisinājums. Lai atrastu vissmagāko akmeni, ir nepieciešamas 15 svēršanas – rīkojamies pēc klasiskās olimpiskās shēmas, tas ir, sākumā sadalām visus akmeņus pāros un katrā pārī atrodam smagāko akmeni (8 svēršanas), tad šos 8 atrastos akmeņus sadalām četros pāros un katrā no tiem atrodam smagāko akmeni (4 svēršanas), pēc tam atrastos četrus akmeņus sadalām divos pāros un katrā pārī atrodam smagāko akmeni (2 svēršanas), visbeidzot salīdzinām pēdējos divus akmeņus (1 svēršana) (skat. 137. att.). Tātad ar 15 svēršanām jau esam atraduši pašu smagāko akmeni. Vēl jāatrod otrs smagākais akmens.

Otrs smagākais akmens var būt tikai kāds no tiem četriem akmeņiem, kas tika salīdzināts ar pašu smagāko akmeni. Smagākais akmens no četriem akmeņiem atrodams ar 3 svēršanām, piemēram, salīdzinām divus akmeņus (1 svēršana), smagāko atstājam svaros un to salīdzinām ar vienu no nesvērtajiem akmeņiem (1 svēršana), atkal svaros atstājot smagāko, tad šo pašu darbību atkārtojam vēlreiz (1 svēršana). Tas nozīmē, ka ar $15 + 3 = 18$ svēršanām var atrast pašu smagāko un otro smagāko akmeni no 16 akmeņu kaudzes.



137. att.

9. Dotas 5 pēc ārējā izskata vienādas bumbas, kuru masas ir 1000 g, 1001 g, 1002 g, 1004 g un 1007 g. Doti arī elektroniskie svari, kas rāda masu gramos. Kā ar trīs svēršanām atrast bumbu, kuras masa ir 1000 g?

Atrisinājums. Pirmajā svēršanā uz svariem liekam divas bumbas un noskaidrojam to kopējo masu. Otrajā svēršanā uz svariem liekam citas divas, vēl nesvērtas bumbas. Katrā no šīm divām svēršanām iegūstam vienu no tabulā parādītajiem svaru rādījumiem.

$2001 = 1000 + 1001$	$2006 = 1002 + 1004$
$2002 = 1000 + 1002$	$2007 = 1000 + 1007$
$2003 = 1001 + 1002$	$2008 = 1001 + 1007$
$2004 = 1000 + 1004$	$2009 = 1002 + 1007$
$2005 = 1001 + 1004$	$2011 = 1004 + 1007$

- Ja abās svēršanās nav iegūts neviens no izceltajiem rezultātiem, tad 1000 g bumba ir tā, kas netika svērta.
- Ja vienā no svēršanām ir iegūts kāds no izceltajiem rezultātiem, tad tas nozīmē, ka 1000 g bumba atrodas attiecīgajā pārī. Trešajā svēršanā nosveram vienu no šī pāra bumbām. Ja svari rāda 1000 g, tad meklētā bumba ir uz svariem, ja citu skaitli, tad 1000 g bumba ir otra šī pāra bumba.

10. Dotas 4 pēc ārējā izskata vienādas monētas, kuru masas ir 1 g, 2 g, 3 g un 4 g. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot katras monētas masu?

Atrisinājums. Vispirms uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām (1 svēršana).

- Ja pirmajā svēršanā svari atrodas līdzsvarā, tad šādu svaru stāvokli izsaka tikai vienādība $1 + 4 = 2 + 3$. Ar divām svēršanām nosakām abas smagākās monētas pāros (1; 4) un (2; 3). Ceturtajā svēršanā salīdzinām šīs smagākās monētas savā starpā, tas ir, noskaidrojam, kura no monētām ir 3 g, kura – 4 g. Monēta, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa ar 4 g monētu, sver 1 g, bet tā monēta, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa ar 3 g monētu, sver 2 g.
- Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad ir divas iespējas: vai nu $1 + 2 < 3 + 4$, vai $1 + 3 < 2 + 4$. Otrajā svēršanā salīdzinām abas monētas no smagākā pāra – smagākā no tām ir 4 g. Trešajā svēršanā salīdzina vieglākā pāra monētas – vieglākā no tām ir 1 g. Ceturtajā svēršanā salīdzina atlikušās divas monētas: vieglākā no tām ir 2 g, bet smagākā – 3 g.

11. Četru pēc ārējā izskata vienādu monētu masas veido ģeometrisko progresiju, kas nav konstanta. Atrast smagāko monētu, veicot divas svēršanas uz sviru svariem bez atsvariem!

Atrisinājums. Apzīmējam monētu masas ar a, aq, aq^2, aq^3, kur $q > 1$. Pirmajā svēršanā uz katra svaru kausa novietojam divas monētas. Pamatosim, ka smagākā monēta noteikti atradīsies kausā, kas nosveras uz leju. Iespējami trīs gadījumi:

- $aq^3 + aq^2 > aq + a$, jo $aq^3 > aq$ un $aq^2 > a$;
- $aq^3 + aq > aq^2 + a$, jo $aq^3 > aq^2$ un $aq > a$;
- $aq^3 + a > aq + aq^2$, jo, ekvivalenti pārveidojot, iegūstam patiesu nevienādību $q^3 - q^2 - q + 1 > 0$ jeb $(q + 1)(q - 1)^2 > 0$.

Tātad esam pamatojuši, ka smagākā monēta atrodas tajā kausā, kas nosveras uz leju. Otrajā svēršanā salīdzinām abas monētas no šī kausa un atrodam smagāko. Līdz ar to ar divām svēršanām esam atraduši smagāko monētu.

Citi avoti:

A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons "Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi", Rīga, 1999. Pieejams: http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2019/01/Gailitis_uc_Kartosanas-un-meklesanas-uzdevumi_1999.pdf

Indukcija (no latīņu valodas 'inductio' – uzvedināšana, ierosināšana) – loģisks slēdziens, pārejot no atsevišķiem gadījumiem uz vispārinājumu.

Induktīvā spriešana – spriešanas paņēmiens, kurā secinājumi tiek iegūti, balstoties uz vairāku eksperimentu vai vērojumu laikā gūtiem rezultātiem. Šādā veidā iegūtos spriedumus sauc par induktīviem spriedumiem.

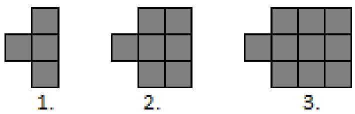
Domāšanas un spriešanas procesā tiek izteikti dažādi apgalvojumi. Tie var būt patiesi, aplami vai tādi, kuru patiesumu nav iespējams novērtēt.

Pieņemsim, ka kādam sportistam ir uzdevums aizlēkt tālumā 7 metrus. Ja viņš ir starptautiskas klases sporta meistars tāllēkšanā, tas viņam sevišķas grūtības nesagādās; ja turpretī viņš ar tāllēkšanu iepriekš nav nodarbojies, tad mēģinājums veikt uzdevumu uzreiz nevar beigties citādi kā ar neveiksmi. Lai izpildītu šo atsevišķo uzdevumu, sportists trenēsies un vispirms aizlēks tālumā 3 m, pēc tam 4 m, 5 m, 6 m, un tikai tad ķersies pie sākotnējā uzdevuma – aizlēkt 7 m tālu.

Līdzīga situācija bieži gadās arī matemātikā: lai atrisinātu kādu atsevišķu problēmu, tiek aplūkota problēmu virkne. Risinot citu pēc citas šīs virknes problēmas, galu galā izdodas saprast, kā risināt vispārīgo problēmu, un tā mēs nonākam pie interesējošās problēmas atrisinājuma.

Uzdevumu piemēri

1. Vilmārs savā burtnīcā zīmē figūras, pirmās trīs no tām parādītas 138. att. Pirmā figūra sastāv no četriem vienādiem kvadrātiem un tās perimetrs ir 5 cm. Katru nākamo figūru Vilmārs iegūst, iepriekšējai figūrai labajā pusē piezīmējot klāt trīs kvadrātus, tā kā parādīts 138. att.



138. att.

a) No cik vienādajiem kvadrātiem sastāv 10. figūra?

b) Nosaki 20. figūras perimetru!

c) Kāds ir kārtas numurs figūrai, kuras perimetrs ir 100 cm?

Atrisinājums. a) Ievērojam, ka, lai iegūtu nākamo figūru, iepriekšējai figūrai tiek pievienoti 3 kvadrāti. Pirmā figūrai ir viena kolonna, kurā ir 3 kvadrāti, otrai figūrai ir divas kolonnas, kurās ir 3 kvadrāti utt. Tātad desmitā figūra sastāvēs no $10 \cdot 3 + 1 = 31$ kvadrāta.

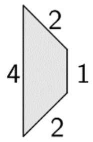
Ievērojam, ka pirmajai figūrai perimetru veido 10 rūtiņu malas un tās perimetrs ir 5 cm, tāpēc 1 rūtiņas malas garums ir $\frac{1}{2}$ cm. Apskatām, kā mainās katras nākamās figūras perimetrs:

- pirmajai figūrai perimetrs ir $P_1 = 5$ cm,
- otrai figūrai perimetrs ir $P_2 = 5 + 1 = 6$ cm, jo pie pirmās figūras perimetra nāk klāt divas kvadrāta malas, kuru kopējais garums ir 1 cm,
- trešajai figūrai perimetrs ir $P_3 = 6 + 1 = 7$ cm, jo pie otrās figūras perimetra nāk klāt divas kvadrāta malas, kuru kopējais garums ir 1 cm,

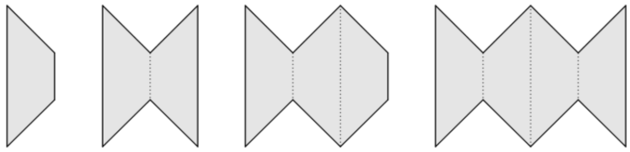
Līdzīgi iegūst arī nākamo figūru perimetrus. Ievērojam, ka figūras perimetrs ir par 4 lielāks nekā figūras kārtas numurs, tas ir, $P_n = n + 4$, kur n ir figūras kārtas numurs.

Tātad **b)** 20. figūras perimetrs ir $P_{20} = 20 + 4 = 24$ cm, **c)** figūras, kuras perimetrs ir 100, kārtas numurs ir $100 - 4 = 96$.

2. Aurēlija uzzīmēja četrstūri, kura malu garumi ir 2, 1, 2 un 4 (skat. 139. att.). Malas, kuru garumi ir 1 un 4, ir paralēlas. Pēc tam viņa sāka zīmēt figūras, kas sastāv no 1; 2; 3; 4; … vienādiem dotajiem četrstūriem, katrā reizē piezīmējot klāt vienu tādu pašu četrstūri (skat. 140. att.).



139. att.



140. att.

a) Kāds ir uzzīmētās figūras perimetrs, ja kopā ir salikti 6 četrstūri?
b) Kāds ir uzzīmētās figūras perimetrs, ja kopā ir salikti 2019 četrstūri?
c) Cik četrstūri ir salikti kopā, ja figūras perimetrs ir 80?
d) Uzrakstīt sakarību, kas apraksta figūras perimetra garumu, ja kopā salikti n četrstūri!

Atrisinājums. Sāksim risināt uzdevumu ar **d)** gadījumu. Iegūtās figūras perimetru veido tās kreisā sāna mala (4 vienības), katra četrstūra augšējā un apakšējā mala ($2+2=4$ vienības) un vēl figūras labā sāna mala. Ja ir uzzīmēts nepāra skaits četrstūru, tad figūras labā sāna mala ir 1 vienību gara, ja pāra skaits četrstūru, tad labā sāna mala ir 4 vienības gara. Līdz ar to iegūstam sakarību perimetra aprēķināšanai:

- ja n ir nepāra, figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot n + 1$;
- ja n ir pāra, figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot n + 4$.

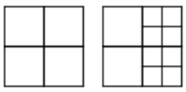
Ievērojam, ja n ir nepāra, tad figūras perimetrs vienmēr ir nepāra skaitlis, ja n ir pāra, tad – pāra skaitlis.

a) Ja kopā ir salikti 6 četrstūri jeb $n = 6$, tad figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot 6 + 4 = 32$.

b) Ja kopā ir salikti 2019 četrstūri jeb $n = 2019$, tad figūras perimetrs ir $P = 4 + 4 \cdot 2019 + 1 = 8081$.

c) Ja figūras perimetrs ir 80 (pāra skaitlis), tad $80 = 4 + 4 \cdot n + 4$ jeb $n = (80 - 4 - 4) : 4 = 18$.

3. Ja kvadrātu var sadalīt n mazākos kvadrātos tā, ka ir ne vairāk kā divu dažādu izmēru kvadrāti, tad skaitli n sauksim par jauku. Piemēram, skaitļi 4 un 10 ir jauki (141. att.).

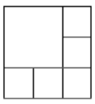


141. att.

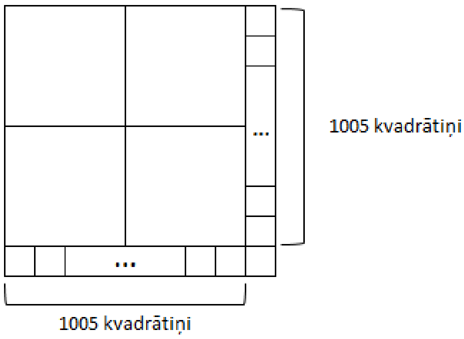
a) Pierādīt, ka skaitlis 6 ir *jauks*!
b) Pierādīt, ka skaitlis 2015 ir *jauks*!
c) Pierādīt, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*!

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 142. att.

b) Skat., piemēram, 143. att. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām 1006 vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat. 143. att.). Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos mazākos kvadrātos.



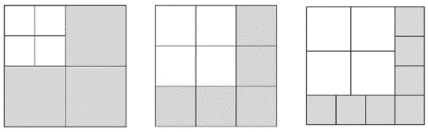
142. att.



143. att.

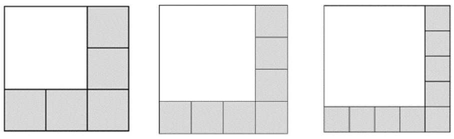
c) Šķirojam divus gadījumus.

- Ja n ir nepāra skaitlis, tad to varam izteikt formā $n = 2k + 5$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k + 1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 144. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k + 1$ mazus kvadrātus. Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos kvadrātos (skat., piemēram, 144. att. baltos kvadrātus). Tātad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k + 5$ kvadrātos, līdz ar to skaitlis n ir jauks.



144. att.

- Ja n ir pāra skaitlis, tad to varam izteikt formā $n = 2k + 2$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k + 1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 145. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k + 1$ mazus kvadrātus. Tā kā atlikusī dotā kvadrāta daļa arī ir kvadrāts, tad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k + 2$ kvadrātos un skaitlis n ir jauks.



145. att.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*.

4. Atrast skaitļa $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2$ pēdējo ciparu!

Atrisinājums. Lai atrastu dotās summas pēdējo ciparu, sagrupējam saskaitāmos un nosakām katras grupas summas pēdējo ciparu šādā veidā:

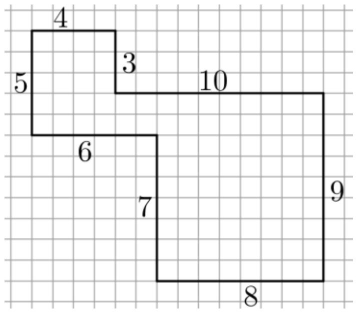
- $10^2 + 20^2 + \cdots + 90^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 0 un pavisam ir 9 šādi saskaitāmie.
- $1^2 + 11^2 + 21^2 + \cdots + 91^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir $1^2 = 1$ un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $1 \cdot 10 = 10$.
- Līdzīgi $2^2 + 12^2 + 22^2 + \cdots + 92^2$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir $2^2 = 4$ un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie.
- Tāpat secinām, ka arī visas pārējās saskaitāmo grupas ir 10 tādu skaitļu summas, kur visu saskaitāmo pēdējie cipari ir vienādi un visas summas pēdējais cipars ir 0.

Ir 10 grupas, katrai no tām summas pēdējais cipars ir 0, tātad uzdevumā dotā skaitļa pēdējais cipars ir 0.

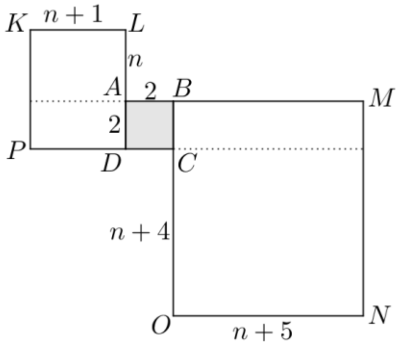
5. a) Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmēt astoņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības!

b) Pierādīt, ka katram naturālam n rūtiņu lapā, kurā rūtiņas malas garums ir 1, pa rūtiņu līnijām ir iespējams uzzīmēt astoņstūri tā, ka tā malu garumi pēc kārtas ir n; $n + 1$; $n + 2$; $n + 3$; $n + 4$; $n + 5$; $n + 6$; $n + 7$.

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 146. att. **b)** Parādīsim, kā katram naturālam n konstruēt astoņstūri $ALKPCONM$ (skat. 147. att.). Ja no A velk n vienības garu nogriezni uz augšu, tad turpina $n + 1$ vienību horizontāli pa kreisi, tad $n + 2$ – vertikāli uz leju, tad $n + 3$ – horizontāli pa labi, būsim nonākuši punktā C. Velkot nogriezni no C ar garumu $n + 4$ vertikāli uz leju, tad $n + 5$ – horizontāli pa labi, tad $n + 6$ – vertikāli uz augšu, tad $n + 7$ – horizontāli pa kreisi, atgriezīsimies sākumpunktā A. Šī konstrukcija nav atkarīga no konkrētās n vērtības.



146. att.

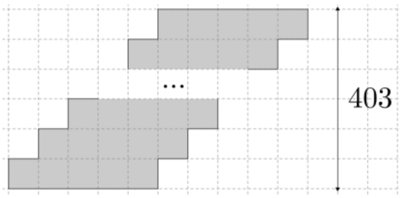


147. att.

Piezīme. Lai atrisinātu b) gadījumu, var uzzīmēt vēl dažus astoņstūrus, izvēloties konkrētas n vērtības, un pēc tam mēģināt saskatīt, kā iegūt vispārinājumu patvaļīgam n.

6. Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 1612-stūri, kura laukums ir 2015 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?

Atrisinājums. Jā, šādu daudzstūri var uzzīmēt (skat., piemēram, 148. att.).

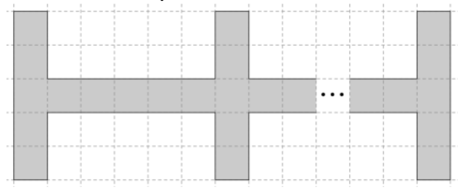


148. att.

Figūras salikšanai izmantoti 403 taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas. Tātad iegūtā daudzstūra laukums ir $5 \cdot 403 = 2015$ rūtiņas. Tā kā katrs taisnstūris satur tieši četras iegūtā daudzstūra malas, tad uzzīmēts ir $4 \cdot 403 = 1612$-stūris.

Piezīmes

1. Lai atrisinātu doto uzdevumu, vispirms var mēģināt uzzīmēt kādu daudzstūri ar mazāku laukumu un mazāku malu (stūru) skaitu. Var ievērot, ka $2015 : 5 = 403$ un $1612 : 4 = 403$, no kā var secināt, ka par pamatu var ņemt četrstūri, kura laukums ir 5 rūtiņas.
2. Daudzstūri var uzzīmēt arī, piemēram, kā parādīts 149. att.



149. att.

7. Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 2017; 2018. Kā katram no tiem pierakstīt priekšā „+” vai „–” zīmi tā, lai iegūtajai izteiksmei būtu vismazākā iespējamā pozitīvā vērtība?

Atrisinājums. Tā kā visi uz tāfeles uzrakstītie skaitļi ir naturāli, tad rezultāts noteikti būs vesels skaitlis. Mazākais pozitīvais veselais skaitlis ir 1. Ja parādīsim, ka var iegūt vērtību 1, tad uzdevums būs atrisināts.

Apskatām četrus pēc kārtas esošus naturālus skaitļus $n; n+1; n+2; n+3$. Ievērojam, ka katram no tiem var pierakstīt priekšā „+” vai „–” zīmi tā, lai iegūtu summu 0:

$$+n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0$$

Sagrupējam skaitļus no 1 līdz 2016 grupās pa četri tā, lai katrā grupā esošo skaitļu summa būtu 0, bet skaitļiem 2017 un 2018 priekšā liekam attiecīgi „–” vai „+”:

$$\underbrace{+1-2-3+4}_{=0}\ \underbrace{+5-6-7+8}_{=0}\ +\ldots\ \underbrace{+2013-2014-2015+2016}_{=0}-2017+2018=1.$$

Līdz ar to esam parādījuši, kā salikt zīmes, lai iegūtu summu 1.

8. Pierādīt, ka $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}=\frac{2019}{2020}$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās vienādība $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Tāpēc pierādāmās vienādības kreisās puses izteiksmi var pārveidot formā:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)$$

Ievērojam, ka šajā izteiksmē parādās pretēji skaitļi, kuru summa ir 0, līdz ar to pēc vienkāršošanas paliek tikai divi saskaitāmie $\frac{1}{1}$ un $-\frac{1}{2020}$, tātad

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020},$$

kas arī bija jāpierāda.

9. Vai var atrast tādus 2019 dažādus naturālus skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$, ka $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2019}}=1$?

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Parādīsim, kā no n saskaitāmajiem var iegūt $(n+1)$ saskaitāmo. Dalām vienādības $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ abas puses ar 2:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}.$$

Pēc tam abām iegūtās vienādības pusēm pieskaitām $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=1.$$

Esam ieguvuši četrus dažādus saskaitāmos, kuru summa ir 1.

Atkal dalot iegūtās vienādības abas puses ar 2 un pieskaitot $\frac{1}{2}$, palielinām saskaitāmo skaitu par 1, tas ir, iegūstam piecus dažādus saskaitāmos, kuru summa ir 1:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1.$$

Šādi turpinot, iegūsim 2019 dažādus saskaitāmos, kuru summa ir un tie visi būs dažādi.

Dažreiz, lai tiktu līdz interesējošajam skaitlim, mūsu apgalvojumu virknē ir jālec nevis par vienu vietu uz priekšu, bet gan par kādu citu skaitu (piemēram, par septiņām – kā to redzēsim 10. uzdevumā).

Spriedumus, kur atsevišķi jāaplūko pāra un nepāra skaitļi, jau redzējām 3. uzdevumā.

10. Ir pieejams neierobežots daudzums 7 un 13 centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Diemžēl dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām (piemēram, ja sūtījums maksā 6, 8 vai 25 centus). Kāda ir lielākā summa, kuru nav iespējams apmaksāt izmantojot tikai šīs pastmarkas?

Atrisinājums. Parādīsim, ka 71 centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām. Šajā summā ir ne vairāk kā piecas 13 centu pastmarkas. Aplūkosim, kāda summa atkarībā no izmantoto 13 centu pastmarku skaita būtu jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām.

13 centu pastmarku skaits	*Summa, kas apmaksāta ar 13 centu pastmarkām*	*Summa, kas jāapmaksā ar 7 centu pastmarkām*
0	0	71
1	13	58
2	26	45
3	39	32
4	52	19
5	65	6

Nevienā no variantiem atlikusī summa nav 7 daudzkārtnis, tātad šo summu nav iespējams apmaksāt ar 7 centu pastmarkām. Tātad 71 centu nav iespējams precīzi apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām.

Pierādīsim, ka visas summas, kas ir lielākas nekā 71 cents, ir iespējams samaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām. Ievērojam, ja varam apmaksāt n centus, tad, pievienojot klāt vienu 7 centu pastmarku, varēsim apmaksāt arī $n+7$ centus. Tātad mums jāparāda, ka var apmaksāt 72, 73, 74, 75, 76, 76 un 78 centus (skat. tabulā zemāk).

Summa	Kā apmaksāt	Kādas summas var apmaksāt ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$)	Kādas summas var apmaksāt
72	$1 \cdot 7 + 5 \cdot 13$	$72 + 7n$	79; 86; 93; ...
73	$3 \cdot 7 + 4 \cdot 13$	$73 + 7n$	80; 87; 94; ...
74	$5 \cdot 7 + 3 \cdot 13$	$74 + 7n$	81; 88; 95; ...
75	$7 \cdot 7 + 2 \cdot 13$	$75 + 7n$	82; 89; 96; ...
76	$9 \cdot 7 + 1 \cdot 13$	$76 + 7n$	83; 90; 97; ...
77	$11 \cdot 7$	$77 + 7n$	84; 91; 98; ...
78	$6 \cdot 13$	$78 + 7n$	85; 92; 99; ...

Piezīmes

1. Lielāko summu, ko nevar apmaksāt ar 7 un 13 centu pastmarkām, var iegūt pārbaudot summas, sākot ar 1, 2, 3, 4 utt. centiem, kamēr nonākam pie vajadzīgās summas (pamatojot, ka lielākas summas varēs apmaksāt).
2. Lielākās summas atrašanai var izmantot arī faktu: ja a un b ir savstarpēji pirmskaitļi, tad lielākais skaitlis, ko nevar izteikt ar a un b, ir $ab - a - b$.

Matemātiskās indukcijas metode

Teorija un piemēri 10.-12. klasei, gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei 2019./2020. m. g.

Jau skolas kursā 10. klasē tiek apgūta matemātiskās indukcijas metode jeb matemātiskās indukcijas princips, kas ir viens no biežāk lietotajiem un svarīgākajiem pierādījumu veidiem. Tas parasti tiek izmantots, lai pierādītu, ka kāds izteikums ir patiess visām naturālām n vērtībām.

Indukcija (no latīņu valodas "*inductio*" (uzvedināšana, ierosināšana) – loģisks slēdziens, pārejot no atsevišķiem gadījumiem uz vispārīgu secinājumu, no atsevišķiem faktiem uz vispārinājumu.

Induktīvā spriešana – spriešanas paņēmiens, kurā secinājumi tiek iegūti, balstoties uz vairāku eksperimentu vai vērojumu laikā gūtiem rezultātiem. Šādā veidā iegūtos spriedumus sauc par induktīviem spriedumiem.

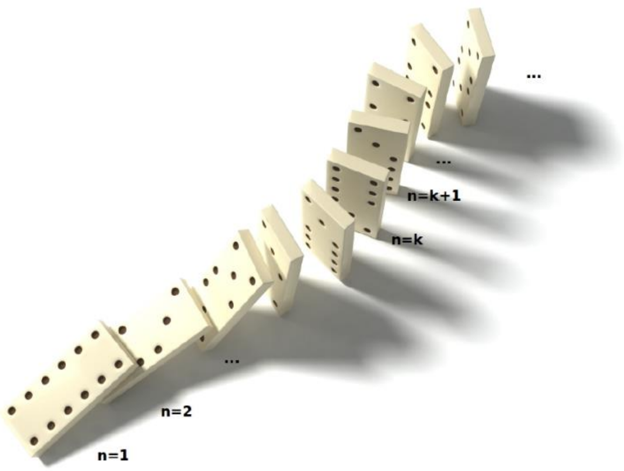
Domāšanas un spriešanas procesā tiek izteikti dažādi apgalvojumi. Tie var būt patiesi, aplami vai tādi, kuru patiesumu nav iespējams novērtēt.

Matemātiskās indukcijas metode ir viena no aritmētikas aksiomām, tāpēc tās patiesums nav jāpierāda. Pēc būtības indukcijas aksioma apgalvo, ka katru naturālo skaitli var iegūt, atkārtoti pieskaitot skaitlim 0 vieninieku.

Lietojot matemātiskās indukcijas metodi uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:

1. pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (***indukcijas bāze***);
2. pieņem, ka šī īpašība ir spēkā pirmajiem k elementiem (***induktīvais pieņēmums***);
3. pierāda, ka tad tā ir patiesa arī $(k+1)$-jam elementam (***induktīvā pāreja***).
4. secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam $n = k$ izriet, ka tas ir patiess elementam $n = k + 1$, un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam n.

Matemātiskās indukcijas metodes ilustrācija – iedomāsimies, ka rindā ir salikti bezgalīgi daudzi domino kauliņi. Ja krīt pirmais kauliņš, tad nokrīt arī otrais, tas savukārt nogāž nākamo utt. Šim procesam turpinoties, visi kauliņi tiek nogāzti.



Klasiskā veidā matemātiskās indukcijas metodi lieto:

- vienādību pierādīšanā;
- dalāmības pierādīšanā (tas ir, lai pamatotu dalīšanas atlikuma vai kāda cita invarianta saglabāšanos);
- rekurentas virknes vispārīgā locekļa formulas pierādīšanā.

Uzdevumu piemēri

1. Pierādīt, ka katram naturālam n ir patiesa vienādība

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $1 \cdot 4 = 1 \cdot 2^2$ jeb $4 = 4$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vienādība izpildās, ja $n = k$, tas ir,

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k \cdot (3k + 1) = k(k + 1)^2.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka vienādība ir spēkā arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir,

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + (k + 1) \cdot (3(k + 1) + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1)^2 \text{ jeb}$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + (k + 1) \cdot (3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\underbrace{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k \cdot (3k + 1)}_{induktīvais\ pieņēmums} + (k + 1) \cdot (3k + 4) =$$
$$= k(k + 1)^2 + (k + 1) \cdot (3k + 4) = (k + 1)(k(k + 1) + 3k + 4) =$$
$$= (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Secinājums. Tā kā vienādība ir patiesa, ja $n = 1$, un no tā, ka vienādība ir spēkā, ja $n = k$, izriet, ka vienādība ir spēkā arī $n = k + 1$, secinām, ka vienādība ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

2. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izpildās

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Atrisinājums. Izmantojot aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summas formulu, iegūstam, ka $1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$. Tātad pietiek pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izpildās

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$ jeb $1 = 1$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vienādība izpildās, ja $n = k$, tas ir,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka vienādība ir spēkā arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}$$

Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3}_{induktīvais\ pieņēmums} + (k + 1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2}{4}\left(k^2 + 4(k + 1)\right) = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}$$

Secinājums. Tā kā vienādība ir patiesa, ja $n = 1$, un no tā, ka vienādība ir spēkā, ja $n = k$, izriet, ka vienādība ir spēkā arī $n = k + 1$, secinām, ka vienādība ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

3. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $7^n + 3^{n+1}$ dalās ar 4.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $7^1 + 3^2 = 16$, kas dalās ar 4.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, tas ir, $7^k + 3^{k+1} \vdots 4$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja $n = k + 1$, tas ir, $7^{k+1} + 3^{k+2} \vdots 4$.

Pārveidojam izteiksmi:

$$7^{k+1} + 3^{k+2} = 7 \cdot 7^k + 3 \cdot 3^{k+1} = 7 \cdot \underbrace{(7^k + 3^{k+1})}_{\vdots 4} - \underbrace{4}_{\vdots 4} \cdot 3^{k+1}$$

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 4, tad arī summa dalās ar 4.

Secinājums. Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n = 1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

4. Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $3 + 5 - 8 = 0$, kas dalās ar 10.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ja $n = k$, tad $3k^5 + 5k^4 - 8k$ dalās ar 10.
Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ja $n = k + 1$, tad $3(k + 1)^5 + 5(k + 1)^4 - 8(k + 1)$ dalās ar 10.
Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$3(k + 1)^5 + 5(k + 1)^4 - 8(k + 1) =$$
$$= 3(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) + 5(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - 8(k + 1) =$$
$$= 3k^5 + 20k^4 + 50k^3 + 60k^2 + 27k = 3k^5 + 5k^4 - 8k + 15k^4 + 50k^3 + 60k^2 + 35k =$$
$$= (3k^5 + 5k^4 - 8k) + 5k \cdot (3k^3 + 10k^2 + 12k + 7).$$

Saskaitāmais $3k^5 + 5k^4 - 8k$ dalās ar 10 pēc induktīvā pieņēmuma.
Saskaitāmais $5k \cdot (3k^3 + 10k^2 + 12k + 7)$ dalās ar 5, jo satur reizinātāju 5, un dalās ar 2, jo

- ja k ir pāra skaitlis, tad reizinātājs k dalās ar 2;
- ja k ir nepāra skaitlis, tad reizinātājs $3k^3 + 10k^2 + 12k + 7$ ir pāra skaitlis un tas dalās ar 2.

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 10, tad arī summa dalās ar 10.

No matemātiskās indukcijas metodes izriet, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5 + 5n^4 - 8n$ dalās ar 10, kas arī bija jāpierāda.

Dažreiz vajag izmantot citu induktīvā sprieduma shēmu – nevis pamatojam, ka no iepriekšējā loģiski izriet nākamais, bet gan – no diviem iepriekšējiem izriet nākamais. Tas ļauj rakstīt vairāk induktīvos pieņēmumus, bet tad arī induktīvo bāzi vajag plašāku – jāpamato gan $n = 1$, gan $n = 2$.

5. Virkne (x_n) dota rekurenti ar formulu $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ un $x_1 = 1,\ x_2 = 5$. Pierādīt, ka virknes vispārīgais loceklis ir formā $x_n = 3^n - 2^n$.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.
Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $x_1 = 3^1 - 2^1 = 1$. Ja $n = 2$, tad $x_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$.
Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka formula ir spēkā ja $n = k$ un $n = k + 1$, tas ir,

$$x_k = 3^k - 2^k \quad \text{un} \quad x_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+1}.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka formula ir spēkā arī tad, ja $n = k + 2$, tas ir, $x_{k+2} = 3^{k+2} - 2^{k+2}$.
Izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūstam

$$x_{k+2} = 5x_{k+1} - 6x_k = 5 \cdot (3^{k+1} - 2^{k+1}) - 6 \cdot (3^k - 2^k) =$$
$$= 5 \cdot 3^{k+1} - 5 \cdot 2^{k+1} - 6 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k =$$
$$= 15 \cdot 3^k - 10 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k = 9 \cdot 3^k - 4 \cdot 2^k = 3^{k+2} - 2^{k+2}.$$

Secinājums. Tā kā formula ir patiesa, ja $n = 1$ un $n = 2$, un no tā, ka formula ir spēkā, ja $n = k$ un $n = k + 1$, izriet, ka formula ir spēkā arī $n = k + 2$, secinām, ka formula ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

6. Skaitļu virknei (a_n) visiem $n > 1$ ir spēkā sakarība $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n$. Aprēķināt a_{50}, ja zināms, ka $a_1 = 1000$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka no dotās vienādības izriet, ka

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n^2 - 1} \qquad (*)$$

Aprēķinām dažu pirmo virknes elementu vērtības atkarībā no a_1 vērtības:

$$a_2 = a_1 \frac{1}{2^2 - 1};$$
$$a_1 + a_2 = a_1 \left(1 + \frac{1}{2^2 - 1}\right) = a_3(3^2 - 1);$$
$$a_3 = a_1 \left(1 + \frac{1}{2^2 - 1}\right) \frac{1}{3^2 - 1};$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \left(1 + \frac{1}{2^2 - 1}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2 - 1}\right) = a_4(4^2 - 1).$$

Pierādīsim formulu

$$a_n = a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{(n-1)^2-1}\right)\frac{1}{n^2-1}$$

vispārīgā veidā, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 2$, tad jau parādījām, ka $a_2 = a_1\frac{1}{2^2-1}$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka formula ir spēkā arī, ja $n = k$

$$a_k = a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{(k-1)^2-1}\right)\frac{1}{k^2-1}.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka formula ir spēkā gadījumā, ja $n = k+1$.

No vienādības (*) pie $n = k+1$ iegūstam $a_{k+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{(k+1)^2-1}$

No uzdevumā dotās vienādības izriet $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = k^2 a_k$, tātad

$$a_{k+1} = \frac{k^2 a_k}{(k+1)^2-1}.$$

Izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūstam vajadzīgo

$$a_{k+1} = a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{(k-1)^2-1}\right)\frac{1}{k^2-1}\cdot\frac{k^2}{(k+1)^2-1} =$$

$$= a_1\left(1+\tfrac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\tfrac{1}{3^2-1}\right)\dots\left(1+\tfrac{1}{k^2-1}\right)\tfrac{1}{(k+1)^2-1}.$$

Pārveidojam pierādīto vienādību:

$$a_n = a_1\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\dots\frac{(n-1)^2}{(n-1)^2-1}\cdot\frac{1}{n^2-1}$$

$$= a_1\frac{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(n-1)^2}{(2^2-1)(3^2-1)\ldots((n-1)^2-1)(n^2-1)}.$$

Izmantojot formulu $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, pārveidojam iegūto vienādību:

$$a_n = a_1\frac{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(n-1)^2}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1))\cdot(3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1))} = a_1\frac{2}{n(n+1)}.$$

Ievietojot skaitliskās vērtības, iegūstam $a_{50} = 1000\cdot\frac{2}{50\cdot 51} = \frac{40}{51}$.

Citi avoti

A. Andžāns, P. Zariņš “Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi” – Rīga, Zvaigzne, 1983.
A. Andžāns, U. Kanders “Matemātiskās indukcijas metode” – Rīga, LU
Pieejams: http://www.lanet.lv/info/matind/index.html#s